ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 2

MATRICES, DETERMINANTES, Y SISTEMAS

UTN.BA

Isabel Pustilnik
Federico Gómez

ÍNDICE

Matrices

Conceptos básicos

Definición de Matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un ordenamiento rectangular de escalares dispuestos en m filas y n columnas. Para designar a cada uno de los $m.n$ elementos de la matriz se utiliza un doble subíndice que indica el número de fila y número de columna que le corresponde en el arreglo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, a_{34} es el elemento ubicado en la fila tres y la columna cuatro y en general a_{ij} es el elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j.

Las matrices suelen designarse con letras mayúsculas: se anota $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ para indicar que es una matriz con m filas y n columnas cuyos elementos son números reales.

Se indican con paréntesis o con corchetes:

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \quad o \quad \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Por ejemplo una matriz de dos filas y tres columnas se puede escribir así:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{2\times3}$$

En este caso, diremos que el tamaño u orden de A es 2x3.

Matriz columna

Podemos pensar los vectores como casos particulares de matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ matriz\ o\ vector\ columna \ , \ C \in \mathbb{R}^{3\times1}$$

Matriz fila

O también:

$$F = (2 \quad 0 \quad 1) \ matriz\ o\ vector\ fila \ , \ F \in \mathbb{R}^{1\times3}$$

Matriz nula

La matriz nula es aquélla cuyos elementos son todos ceros. La simbolizamos con O.
(En la guía de trabajos prácticos se la designa como N)

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si son del mismo orden (tamaño) y sus elementos respectivos son iguales.

$$A, B \in \mathbb{R}^{mxn} \quad A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$$

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces:

$$A + B = C \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \ \forall i, j$$

Ejemplo

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces la suma es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, k \in \mathbb{R}$, entonces:

$$kA = B \ \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid b_{ij} = ka_{ij} \ \ \forall i, j$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $3A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

Cuando $k = -1$, obtenemos la matriz opuesta de A:

$$-A = (-1)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Podemos así definir la diferencia (resta) entre dos matrices del mismo tamaño:

$$A - B = A + (-B)$$

O sea:

$$A - B = C \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Ejemplo

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Hallar $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad [\mathbf{1}]$$

$$3X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\mathbf{2}]$$

Resolución

Es un sistema de ecuaciones matricial. Las incógnitas son matrices.

Podríamos plantear el sistema escribiendo las matrices como

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

Pero quedarían 8 ecuaciones con 8 incógnitas.

Para facilitar la resolución, podemos recurrir a las herramientas que utilizamos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones queda:

$$5X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en $[\mathbf{1}]$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Sugerimos al lector que verifique los resultados obtenidos reemplazando en [2].

Propiedades de la suma de matrices y del producto por un escalar

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vimos que: $A + B \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. $A + B = B + A$

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A+O = O+A = A$
4. $A+(-A) = (-A)+A = O$
5. $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$
6. $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
8. $1A = A$

Puede observarse la analogía entre estas propiedades y las que habíamos enunciado en la unidad anterior para vectores de $\mathbb{R}^3$.

Producto de matrices

Intuitivamente podría pensarse que el producto de matrices se obtiene multiplicando los elementos correspondientes. Sin embargo, esta definición no resulta útil para resolver problemas que involucren matrices. La experiencia matemática vinculada sobre todo a los sistemas de ecuaciones lineales, ha motivado la siguiente definición de producto de matrices.

Definiremos primero el producto de una matriz fila por una matriz columna, y luego generalizaremos.

Si $A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nx1}$, entonces:

$$AB = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Observemos la similitud con el producto escalar de vectores.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, o sea se cumple que la cantidad de columnas de la primera matriz es igual a la cantidad de filas de la segunda:

$$A_{m\times n} . B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Deben ser iguales para que
pueda realizarse el producto de matrices

Entonces el producto es

$$\boxed{AB = C \in \mathbb{R}^{m\times p} \quad | \quad c_{ij} = fila\ i\ (A) \cdot columa\ j\ (B)}$$

Una forma alternativa de expresar el producto es:

$$AB = C \in \mathbb{R}^{m\times p} \quad | \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Ejemplo

Sean,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Es posible calcular $A.B$ porque A tiene tres columnas y B tiene tres filas. El resultado del producto es una matriz de 2×3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.1 + 3.2 & 1.1 + 2.(-1) + 3.0 & 1.2 + 2.0 + 3.3 \\ 4.1 + 1.1 + 0.2 & 4.1 + 1.(-1) + 0.0 & 4.2 + 1.0 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

No se puede calcular BA porque el número de columnas de B no coincide con el número de filas de A.

Ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;,\; Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PQ \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;,\; PQ = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 7 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$QP \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;,\; QP = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

O sea que ***el producto de matrices no es conmutativo***.

Propiedades del producto

En lo que sigue entendemos que las operaciones mencionadas pueden efectuarse.

1) $(AB)C = A(BC) \quad asociatividad$

2) $(A+B)\,C = AC + BC$ $\quad distributividad\ a\ derecha$

$P(Q+R) = PQ + PR$ $\quad distributividad\ a\ izquierda$

3) $(kA)B = k(AB) = A(kB)$, $k \in \mathbb{R}$

4) $OA = O$ $\ y\ $ $AO = O$, siendo O la matriz nula

EPL 1

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$

Analizar la validez de cada una de las siguientes proposiciones:

1) $AB = O \implies A = O \ \vee \ B = O$

2) $AB = AC \ \wedge \ A \neq O \implies B = C$

EPL 2

Un comercio que vende productos de electrónica, paga una comisión a los vendedores y tiene un beneficio (ganancia) según cada producto. En una tabla se registra el precio de venta, el beneficio para el comercio, la comisión para el vendedor y el costo del producto. Además se tiene información sobre las unidades vendidas en diferentes sucursales. A continuación mostramos dos tablas que resumen esa información para el mes de agosto 2013:

Precio de venta, beneficio, costo, comisión por producto [AGOSTO 2013]

	LED 32' BA455	LED BX567	Smartphone	Tablet 10'	Notebook
Costo	$ 3.200,00	$ 4.500,00	$ 2.500,00	$ 4.800,00	$ 5.600,00
Comisión	$ 200,00	$ 250,00	$ 30,00	$ 40,00	$ 120,00
Beneficio	$ 700,00	$ 900,00	$ 200,00	$ 340,00	$ 800,00
Precio de venta	$ 4.100,00	$ 5.650,00	$ 2.730,00	$ 5.180,00	$ 6.520,00

Unidades vendidas de cada producto por sucursal [AGOSTO 2013]

	Sucursal 1	Sucursal 2	Sucursal 3	Sucursal 4
LED 32' BA455	23	67	43	4
LED BX567	56	20	32	43
Smartphone	10	65	67	65
Tablet 10'	45	3	23	76
Notebook	67	65	43	80

Si A y B son las matrices correspondientes a estas tablas:

a) Calcular e interpretar el producto AB. ¿Cuál es la sucursal que obtuvo la máxima ganancia?

b) ¿Se puede calcular BA? ¿Tiene interpretación práctica BA?

Nota: hacer el producto de matrices de órdenes grandes puede implicar demasiado trabajo de cálculo. En estos casos se puede utilizar la ayuda de calculadoras o de un software. En el siguiente link hay un tutorial para hacer cálculos entre matrices con wxMaxima.

Tutorial de wxMaxima

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que indicamos como A^t, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene a partir de A cambiando las filas por las columnas.

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x3}$, entonces su traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x2}$

Propiedades de la trasposición

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(kA)^t = kA^t$, $k \in \mathbb{R}$

3) $(A^t)^t = A$

4) $\boldsymbol{(AB)^t = B^tA^t}$

Ejemplo

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos:

a) $(AB)^t$
b) A^tB^t
c) B^tA^t

Resolución

a) Calculamos AB y luego trasponemos:

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 10 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Trasponemos y luego hacemos el producto:

$$A^t B^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \quad no\ se\ puede\ realizar$$

Como no coinciden el número de columnas de A^t con el número de filas de B^t, no se puede hacer el producto.

c)
$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo verificamos la propiedad enunciada: $(AB)^t = B^t A^t$

Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es aquélla que tiene igual número de filas y de columnas. Denominamos $\mathbb{R}^{nxn}$ al conjunto de matrices cuadradas de orden *n* (*n* filas y *n* columnas).

La *diagonal principal* de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{ii}.

Matriz identidad

La matriz identidad, que simbolizamos con I, es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en todos los demás elementos.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad: La matriz identidad es el *elemento neutro* para el producto de matrices cuadradas. Se comporta como el 1 para los números reales.

Lo mostramos para matrices 2 × 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\,I = I\,A = A}$$

Matriz inversa

En el conjunto de los números reales existe el inverso multiplicativo para todo número real distinto de cero. Dado un número real a distinto de cero, b es su inverso multiplicativo si y solo si $a.b = 1$.

A continuación definiremos el inverso multiplicativo para matrices cuadradas.

Se dice que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si y sólo si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que:

$$AB = BA = I$$

Ejemplo

Analizar si las siguientes matrices son inversibles:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿$\exists B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AB = I$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ -3a - c = 0 \\ -3b - d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = 0 \; Sistema\ incompatible$$

Como llegamos a una contradicción, la matriz A no es inversible.

Observación: el único número real no inversible es el cero; pero en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vemos que existen matrices no nulas que no tienen inversa.

Con la matriz P:

¿$\exists\, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid PQ = I$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \; a = 1 \;,\; b = -1 \;,\; c = -2 \;,\; d = 3$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les proponemos verificar que $QP = I$.

Entonces P es inversible, y Q se denomina *inversa de* P.

La notación es:

$$Q = P^{-1}$$

Entonces:

$$\boxed{PP^{-1} = P^{-1}P = I}$$

Más adelante analizaremos qué condición debe cumplir una matriz para ser inversible.

Observación: Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces:

$$AB = I \Leftrightarrow BA = I \qquad [1]$$

O sea: para matrices cuadradas, si encontramos B tal que $AB = I$, podemos afirmar que B es la inversa de A.

Propiedades de la inversión de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$ inversibles

Entonces:

1) AB es inversible y su inversa es: $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

Esto significa que la inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$.

Para demostrar esta propiedad, veamos que: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

Como el producto de matrices es asociativo, resulta:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$$

El lector puede comprobar que: $(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = I$

Hemos demostrado que el producto de matrices inversibles es inversible. ¿Ocurre lo mismo con la suma de matrices inversibles?

2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}\,A^{-1} \quad (k \neq 0)$

3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Dejamos las demostraciones a cargo del lector.

Potencias de una matriz cuadrada

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es posible definir potencias de A como sigue:

$$A^2 = A\,A$$

$$A^3 = A\,A\,A$$

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\ldots\,A}_{k\ veces} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

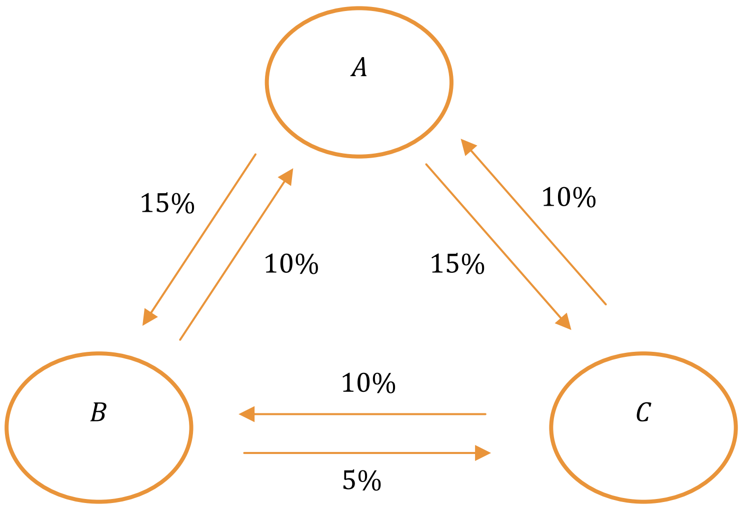
$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

EPL[1] 3

En una ciudad hay tres empresas de telefonía celular (A, B y C) que controlan el mercado.

Inicialmente cada empresa tiene una fracción de la clientela que denominaremos a_0, b_0 y c_0.

Entonces resulta: $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ (no hay otras empresas)



La figura resume el porcentaje de clientes que cambian de empresa durante un período de seis meses.

Este modelo matemático se basa en los siguientes supuestos:

[1] Adaptado de Kozak, Ana María y otros, *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal,* p. 356

- *El porcentaje de cambio entre las empresas se mantiene constante con el tiempo*.

- *Los clientes seguirán siendo consumidores de una de estas tres empresas.*

- *No se incorporan nuevos clientes al sistema.*

Llamemos $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ al vector de estado inicial, y $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ al vector que indica la fracción de la clientela que corresponde a cada empresa al cabo de un semestre.

Veamos cómo puede obtenerse X_1 a partir de X_0 .

De acuerdo con la figura, podemos deducir que al cabo de un período (semestre) la empresa A conservará 70% de su clientela propia.

¿Qué porcentaje de su clientela conservarán las empresas B y C al cabo de un semestre?

Según los datos, finalizado el 1° semestre la fracción de la clientela que tiene A puede obtenerse así:

$$0{,}70\, a_0 \;+\; 0{,}10\, b_0 \;+\; 0{,}10\, c_0 \;=\; a_1$$

¿Qué ecuaciones permiten obtener b_1 y c_1?

Resulta entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0{,}70a_0 + 0{,}10b_0 + 0{,}10c_0 = a_1 \\ 0{,}15a_0 + 0{,}85b_0 + 0{,}10c_0 = b_1 \\ 0{,}15a_0 + 0{,}05b_0 + 0{,}80c_0 = c_1 \end{cases}$$

El lector puede comprobar que este sistema puede expresarse mediante un producto de matrices como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

O sea:

$$MX_0 = X_1 \qquad\qquad [1]$$

La matriz $M \in \mathbb{R}^{3x3}$, que caracteriza la evolución del sistema, se denomina *matriz de transición*.

¿Qué características presenta esta matriz de transición?

1) Todos sus elementos son números reales comprendidos entre 0 y 1.

2) La suma de los elementos de cada columna es 1.

Las matrices cuadradas que cumplen estas dos condiciones se denominan matrices estocásticas o matrices de probabilidad.

Como la matriz de transición se mantiene para el 2º período, la fracción de clientes para el tiempo $t = 2$ puede calcularse como:

$$MX_1 = X_2 \qquad [2]$$

De [1] y [2] se deduce que: $X_2 = M^2 X_0$

Si los porcentajes de cambio de clientela no cambian en los períodos siguientes, entonces M no cambia cuando se pasa del estado $(n-1)$ al estado n.

Por lo tanto: $X_n = MX_{n-1} = \underbrace{M\, M \ldots M}_{n\ veces}\, X_0 = M^n X_0$

O sea, para obtener cómo se distribuyen los clientes luego de n períodos, podemos proceder así:

$$\boxed{X_n = M^n X_0}$$

Suponiendo que inicialmente las tres empresas se reparten por partes iguales la clientela, les pedimos que calculen (**UTILIZANDO WXMAXIMA - LINK**) cómo resulta la distribución de clientes:

1. Al cabo de 3 años.
2. Al cabo de 10 años
3. Al cabo de 15 años

Observen luego de hacer los cálculos que en la medida en que el tiempo pasa, las cuotas de mercado de las empresas tienden a estabilizarse.

4. Responder las mismas preguntas suponiendo que inicialmente las cuotas de mercado de las empresas A, B y C son respectivamente: 0,5 , 0,35 y 0,15.
5. ¿Se produce el mismo fenómeno de estabilización en este caso?

Matrices cuadradas especiales

Matriz simétrica

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si y sólo si $A = A^t$

O sea:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Las condiciones para que una matriz de orden tres sea simétrica son:

$$\begin{cases} a_{21} = a_{12} \\ a_{31} = a_{13} \\ a_{32} = a_{23} \end{cases}$$

Entonces la forma de una matriz simétrica de orden tres es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A^t$$

Matrices antisimétricas

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica si y sólo si $A = -A^t$

O sea:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Veamos qué pasa con los elementos de la diagonal principal.

Si $i = j$ debería ser $a_{ii} = -a_{ii}$, pero el único número que es el opuesto de sí mismo es el cero. Por lo tanto, la diagonal principal está formada por ceros.

Las condiciones para que una matriz de orden tres sea antisimétrica son:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{21} = -a_{12} \\ a_{31} = -a_{13} \\ a_{32} = -a_{23} \end{cases}$$

Entonces la forma de una matriz antisimétrica de orden tres es:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & a & b \\ -a & \mathbf{0} & c \\ -b & -c & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A^t$

EPL 4

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Probar que $A + A^t$ es simétrica
2. Probar que $A - A^t$ es antisimétrica

Observemos que:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{simétrica} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{antisimétrica}$$

Entonces: *toda matriz cuadrada puede expresarse como la suma de una simétrica y una antisimétrica.*

¿Cómo se expresa $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica?

Matrices triangulares

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior cuando los elementos debajo de la diagonal principal son ceros:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior cuando los elementos por encima de la diagonal principal son ceros:

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Matrices diagonales

Una matriz D es diagonal si es triangular superior e inferior:

$$\boxed{D \in \mathbb{R}^{n\times n}\ diagonal \ \Leftrightarrow \ a_{ij} = 0\ \forall i \neq j}$$

La forma de una matriz diagonal de orden tres es:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Veamos qué característica especial presentan las potencias de una matriz diagonal:

$$D^2 = D.D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = D.D.D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

En general:

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} , \quad k \in \mathbb{N}$$

Matrices escalares

Una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Las matrices escalares de orden 3 tienen esta forma:

$$E = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \ , \ k \in \mathbb{R}$$

$$E \in \mathbb{R}^{n \times n} \ es\ escalar \Leftrightarrow E = kI \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Matrices ortogonales

Una matriz cuadrada es ortogonal cuando su traspuesta coincide con su inversa:

$$\boxed{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ es\ ortogonal \ \Leftrightarrow \ A^t = A^{-1} \ \Leftrightarrow \ AA^t = I \ \wedge \ A^t A = I}$$

Por ejemplo las siguientes matrices son ortogonales:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Dejamos a cargo del lector verificar que las matrices cumplen la definición.

Observemos que *las columnas de A y de B son vectores ortogonales y de módulo 1*. Ésta es la característica que distingue a las matrices ortogonales.

Determinantes

Vimos previamente que no todas las matrices son inversibles.

¿Cómo podemos saber si una matriz tiene inversa?

El determinante de una matriz proporciona información para responder a esta pregunta.

En la unidad 1, cuando vimos producto vectorial y mixto, habíamos definido determinantes de orden 2 y de orden 3. Recordamos aquí las fórmulas presentadas:

A cada matriz cuadrada puede asignársele un número real que llamaremos su *determinante* y designaremos como $det(A)$ o $|A|$. Para matrices $2x2$ y $3x3$ el determinante se calcula como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observación: El determinante no está definido para matrices rectangulares.

Ejemplo

El determinante de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es:

$$\det(A) = 3.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 3.2 - (-1).4 + (-1).(-1)$$

$$\det(A) = 11$$

La regla de Sarrus es una forma práctica de calcular determinantes, sólo aplicable para matrices de 3×3.

Consideremos el siguiente esquema en el cual agregamos al final de una matriz de 3×3 las filas 1 y 2. El determinante se calcula sumando los productos indicados por las flechas que que van de izquierda a derecha y restando los productos indicados por las flechas que van de derecha a izquierda:

$$|A| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Para la matriz considerada en el ejemplo anterior:

$$|A| = \begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} = 3.1.2 + 2.1.(-1) + 3.(-1).0 - (-1).1.3 - 0.1.3 - 2.(-1).2 = 11$$

Desarrollo de un determinante por cofactores

Dada $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, se denomina *menor* M_{ij} a la submatriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene a partir de A eliminando la fila i y la columna j.

Se denomina *cofactor* C_{ij} del elemento a_{ij} al producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz menor M_{ij} :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

Por ejemplo para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices menores y los cofactores de la primera fila son:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.(-4) = 4$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-8) = -8$$

Observación:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si \ \ i+j \ \ es \ \ par \\ -1 & si \ \ i+j \ \ es \ \ impar \end{cases}$$

Con estas definiciones previas, estamos en condiciones de enunciar el desarrollo de un determinante de orden n.

El determinante de una matriz puede calcularse utilizando los cofactores de cualquier fila o cualquier columna.

Desarrollo por fila i:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Este cálculo se puede hacer tomando cualquiera de las filas de A, o sea: $i = 1, 2, \dots, n$

Desarrollo por columna j:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo

Retomemos la matriz del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El desarrollo del determinante por fila 1 es:

$$\det(A) = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13}$$

Reemplazando los cofactores calculados previamente, resulta:

$$\det(A) = 3.0 + 1.4 + 4.(-8) = -28$$

Veamos que si desarrollamos el determinante por la columna 3 obtenemos el mismo resultado:

$$\det(A) = a_{13}\, C_{13} + a_{23}\, C_{23} + a_{33}\, C_{33}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\det(A) = 4.(-8) + 1.(-3) + 1.7 = -28$$

El lector puede comprobar que el determinante no varía si se desarrolla por otra fila o columna.

Ejemplo

Calculemos el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que resulta económico desarrollar el determinante por la tercera columna:

$$\det(A) = \underbrace{0.C_{13}}_{0} + \underbrace{0.C_{23}}_{0} + 1.C_{33} + \underbrace{0.C_{43}}_{0} = C_{33}$$

Calculemos el cofactor C_{33}:

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Para el cálculo del determinante de esta matriz de 3×3 es conveniente usar la primera columna:

$$C_{33} = 2.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{33} = -14 + 6 = -8$$

Este ejemplo muestra que para simplificar los cálculos, en general es conveniente desarrollar el determinante por la fila o columna que tenga mayor cantidad de ceros.

Determinante de una matiz triangular

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es triangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la expresión de su determinante?

Podemos calcular el determinante de A por la primera columna:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Hemos llegado a la siguiente conclusión: si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Esto se puede generalizar para matrices de cualquier orden: si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\boxed{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ triangular \ \Rightarrow \ \det(A) = a_{11}.a_{22} \dots .a_{nn}}$$

Teniendo en cuenta que la matriz identidad es triangular, se deduce que:

$$\boxed{\det(I) = 1}$$

Propiedades de los determinantes

En general (es decir, a menos que la matriz sea triangular o tenga alguna otra cualidad especial), el cálculo de determinantes por medio del desarrollo por cofactores no es eficiente por el número de operaciones que implica cuando se trabaja con matrices grandes.

A continuación veremos una serie de propiedades que facilitan el cálculo de determinantes.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. En lo que sigue utilizaremos la notación:

$$A = (A_1 \ \ A_2 \ \ \dots \ \ A_n)$$

donde A_j representa la columna j de la matriz A.

Propiedad 1

Como un determinante puede desarrollarse por cofactores tomando cualquier fila o columna de la matriz, se deduce que:

$$\boxed{\det(A) = \det(A^t)}$$

Por lo tanto, **todas las propiedades que enunciemos para las columnas de una matriz son válidas para sus filas.**

Propiedad 2

Si B es la matriz que se obtiene multiplicando una columna de A por un escalar $k \in \mathbb{R}$, $det(B) = k\, det(A)$. O sea:

$$\boxed{\det\big(A_1\ \ A_2\ \ \ldots kA_j \ldots\ \ A_n\big) = k\det\big(A_1\ \ A_2\ \ \ldots A_j \ldots\ \ A_n\big)}$$

Comprobemos la propiedad para una matriz de 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ ,\ \det(A) = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix} = akd - kbc = k(ad - bc) = k\det(A)$$

Propiedad 3

Si una columna de A puede expresarse como $A_j = A_j' + A_j''$, entonces $det(A)$ puede descomponerse así:

$$\boxed{\det\big(A_1\ \ A_2\ \ \ldots A_j' + A_j'' \ldots\ \ A_n\big) = \det\big(A_1\ \ A_2\ \ \ldots A_j' \ldots\ \ A_n\big) + \det\big(A_1\ \ A_2\ \ \ldots A_j'' \ldots\ \ A_n\big)}$$

Comprobemos para una matriz de 2×2:

$$\det\begin{pmatrix} a & b' + b'' \\ c & d' + d'' \end{pmatrix} = a\,(d' + d'') - c\,(b' + b'')$$

$$= ad' + ad'' - cb' - cb'' = (ad' - cb') + (ad'' - cb'') = \det\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b'' \\ c & d'' \end{pmatrix}$$

Propiedad 4

Si se permutan dos columnas de A, el determinante cambia de signo:

$$\boxed{\det\big(A_1\ \ A_2 \ldots\ \ A_i \ldots A_j \ldots A_n\big) = -\det\big(A_1\ \ A_2 \ldots\ \ A_j \ldots A_i \ldots A_n\big)}$$

Comprobemos para una matriz de 2×2:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Propiedad 5

Si A tiene una columna $\mathbf{0}$ de ceros, entonces su determinante es cero:

$$\boxed{\det(A_1\ \ \ldots \mathbf{0} \ldots\ \ A_n) = 0}$$

Esta propiedad puede deducirse aplicando la propiedad 2:

$$\det(A_1\ \ \ldots \mathbf{0} \ldots\ \ A_n) = \det\big(A_1\ \ \ldots\ 0A_j\ \ldots\ \ A_n\big) = 0\det\big(A_1\ \ \ldots\ A_j\ \ldots\ \ A_n\big) = 0$$

Propiedad 6

Si A tiene dos columnas iguales, entonces su determinante es cero:

$$\boxed{A_i = A_j \ \Rightarrow \ \det(A) = 0}$$

Esta propiedad puede deducirse de la propiedad 4 cuando se permutan las columnas iguales.

Propiedad 7

Si $A_j = k\,A_i \ (k \in \mathbb{R})$, entonces el determinante es cero:

$$\boxed{\det(A_1 \ A_2 \dots A_i \dots kA_i \ \dots A_n) = 0}$$

Dejamos la demostración a cargo del lector.

Propiedad 8

Si a una columna se le suma un múltiplo de otra, el determinante no varía.

La demostración se basa en algunas de las propiedades anteriores:

$$\det\left(A_1 \ A_2 \dots \ A_i \ \dots \ \boldsymbol{A_j} + \boldsymbol{kA_i} \ \dots A_n\right) =$$

$$= \det\left(A_1 \ A_2 \dots \ A_i \dots \mathbf{A_j} \dots A_n\right) + \underbrace{\det(A_1 \ A_2 \dots \ A_i \dots \boldsymbol{kA_i} \dots A_n)}_{=0} = \det(A)$$

La demostración se basa en las propiedades 3 y 7 enunciadas previamente.

Propiedad 9

Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\det(kA) = k^{\boldsymbol{n}} \det(A)}$$

Proponemos al lector que demuestre esta propiedad, teniendo en cuenta la propiedad 2.

Propiedad 10

El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces:

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

Observación importante: el determinante de la suma de matrices no es igual a la suma de sus determinantes. Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathrm{A}) = -2$, $\det(\mathrm{B}) = 5$ pero $\det(A+B) = 6 \neq -2+5$

Entonces:

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Propiedad 11

Si $k \in \mathbb{N}$, teniendo en cuenta la propiedad anterior se deduce que:

$$\det(A^k) = \det\left(\underbrace{A\,A \ldots A}_{k\ \ veces}\right) = [\det(A)]^k$$

$$\boxed{\det(A^k) = [\det(A)]^k\ ,\ \ k \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcular el determinante de A^{100}

Resolución

Obtener A^{100} resulta complicado por la cantidad de cálculos que implica. Podemos usar la propiedad 11 para simplificar los cálculos:

$$\det(A^{100}) = [\det(A)]^{100}$$

Y como $F_3 = 2F_1$, de la propiedad 7 se deduce que $\det(A) = 0$.

Luego:

$$\det(A^{100}) = 0$$

Ejemplo

Calculemos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $A_1 = A_4$ podemos afirmar que $\det(A) = 0$ (propiedad 6).

Ejemplo

Calculemos el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si tenemos en cuenta que $A_4 = A_1 + A_2$, aplicando propiedades podemos afirmar que $\det(A) = 0$. ¿Por qué?

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 2$, calcular $\det\left(\frac{3}{2}\, A^3\right)$

Resolución

$$\det\left(\frac{3}{2}\, A^3\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\mathbf{3}} \det(A^3) = \frac{27}{8}\, [\det(A)]^3 = \frac{27}{8}.2^3 = 27$$

Donde usamos las propiedades 9 y 11.

Ejemplo

Queremos calcular el determinante de la siguiente matriz de 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la propiedad 8 para obtener ceros en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -5 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

Donde hemos realizado:

$$(1):\ \ F_2 \to F_2 - F_1$$

$$(2):\ \ F_3 \to F_3 - 2F_1$$

$$(3): F_4 \to F_4 - 3F_1$$

Ahora podemos desarrollar el determinante por la primera columna:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -9 \\ -5 & -6 & -12 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(4)} (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(5)} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$(4): Propiedad\ 9\ de\ determinantes$$

$$(5): F_2 \to F_2 - 3F_1\ \text{ y }\ F_3 \to F_3 - 5F_1$$

Observemos que la aplicación de la propiedad 8 nos permitió reducir el cálculo de un determinante de 4×4 a uno de 3×3.

EPL 5

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = (A_1\ A_2\ A_3)$

Demostrar la siguiente propiedad:

Si $A_3 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ entonces el determinante de A es cero.

El determinante de la inversa

Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es inversible si existe $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que $AB = I$.

Si A es inversible, su inversa se indica como A^{-1} y se verifica que:

$$A\,A^{-1} = I$$

Aplicando determinantes, resulta:

$$\det(A\,A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Como el determinante es distributivo respecto del producto:

$$\det(A)\ \det(A^{-1}) = 1$$

Entonces:

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad (\det(A) \neq 0)}$$

Para que esta fórmula sea válida, el determinante de A debe ser distinto de cero. Por lo tanto, el determinante permite decidir si una matriz tiene inversa:

$$\boxed{\boldsymbol{A \in \mathbb{R}^{nxn}\ es\ inversible \iff \det(A) \neq 0}}$$

Por ejemplo $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible porque $\det(M) \neq 0$.

En cambio $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ no es inversible porque $\det(A) = 0$.

Observación:

Las matrices inversibles también se llaman *regulares*.

Las matrices no inversibles también se denominan *singulares*.

Ejemplo

Sea $A = (A_1 \ \ A_2 \ \ A_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\det(A) = k \neq 0$

$$B = \left(\underbrace{A_2}_{B_1} \quad \underbrace{A_1 + 3A_3}_{B_2} \quad \underbrace{A_1 - A_2}_{B_3} \right)$$

Mostrar que B es inversible y calcular $\det(-2A^t B^{-1})$

Resolución

$$B\ es\ inversible \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$$

$$\det(\mathrm{B}) = \det(A_2 \quad A_1 + 3A_3 \quad A_1 - A_2)$$

Usando la propiedad 3:

$$= \underbrace{\det(A_2 \quad A_1 \quad A_1)}_{=0 \ \ por\ prop.6} + \det(A_2 \quad 3A_3 \quad A_1) + \underbrace{\det(A_2 \quad A_1 \quad -A_2)}_{=0\ por\ prop.7} + \underbrace{\det(A_2 \quad 3A_3 \quad -A_2\,)}_{=0 \ \ por\ prop.7}$$

Luego utilizando propiedades 2 y 4:

$$\det(\mathrm{B}) = \det(A_2 \quad 3A_3 \quad A_1) = 3.\det(A_2 \quad A_3 \quad A_1) = 3.(-1).\det(A_1 \quad A_3 \quad A_2)$$
$$= 3.(-1)^2.\det(A_1 \quad A_2 \quad A_3) = 3k$$

Cómo $k \neq 0$, B es inversible y su determinante es:

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{1}{3k}$$

Luego:

$$\det(-2A^t\, B^{-1}) = (-2)^3 \det(A^t)\ \det(B^{-1}) = -8.3k.\frac{1}{3k} = -8$$

EPL 6

Utilizar wxMaxima para calcular el determinante, en función de k, de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & k & 2 \\ 4 & k & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de k para los cuales la matriz es inversible.

Sugerencia: para resolver este ejercicio pueden ser útiles los comandos para calcular el determinante, simplificar una expresión algebraica y hallar las raíces de un polinomio que se explican en el tutorial de wxMaxima.

Matriz Adjunta

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, se denomina *matriz de cofactores de* A a la matriz que se obtiene reemplazando cada elemento de A por su respectivo cofactor.

Por ejemplo para una matriz de 3 × 3, su matriz de cofactores es:

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

La traspuesta de la matriz de cofactores se denomina ***adjunta de*** $\boldsymbol{A}$ y se indica como $\boldsymbol{Adj(A)}$:

$$Adj(A) = \left(Cof(A)\right)^t = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, calculemos sus cofactores para obtener la matriz adjunta:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42 \qquad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 \qquad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Observación: Recordemos que $(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si\ \ i+j\ \ es\ par \\ -1 & si\ \ i+j\ \ es\ impar \end{cases}$

Esto facilita el cálculo de los cofactores, ya que $(-1)^{i+j}$ indica un signo $+$ o $-$ de acuerdo con la posición de cada elemento a_{ij}.

Entonces la matriz de los cofactores es:

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Trasponemos para obtener la adjunta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Si A es inversible, veremos que su adjunta proporciona un método para obtener la inversa.

Obtención de la inversa a través de la adjunta

Habíamos visto que el determinante permite decidir si una matriz es inversible.

El lector puede comprobar para la matriz del ejemplo anterior que:

$$\det(A) = 27 \Longrightarrow \ \ A\ es\ inversible$$

Calculemos el producto de la matriz A con su adjunta:

$$A\ Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

¿Y si lo calculamos invirtiendo el orden? En general el producto de matrices no es conmutativo, pero en este caso:

$$Adj(A)\ A = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Se cumple que el producto de la matriz por su adjunta (en cualquier orden) da por resultado una matriz escalar que tiene en su diagonal al determinante de la matriz A. Esto no es casual sino que se cumple para toda matriz cuadrada.

Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, puede demostrarse que:

$$\boxed{A\ Adj(A) = \det(A)\ I \quad \wedge \quad Adj(A)\ A = \det(A)\ I}$$

De esta propiedad puede deducirse que:

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\ Adj(A)\right) = I \quad \wedge \quad \left(\frac{1}{\det(A)}\ Adj(A)\right) A = I$$

Por lo tanto podemos afirmar que $\boldsymbol{si}\ \ \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$, la inversa de A es:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ Adj(A)}$$

Retomando el ejemplo anterior,

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Caso particular: inversa de una matriz de 2x2

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} \neq \mathbf{0}$, podemos afirmar que A es inversible y calcular su inversa mediante la matriz adjunta.

Dejamos a cargo del lector comprobar que la matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto, resulta:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Por ejemplo, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $la\ inversa\ es \quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

En la primera unidad habíamos visto que una recta en $\mathbb{R}^3$ puede definirse a través de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Por ejemplo:

$$r: \begin{cases} x + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Este sistema puede expresarse de un modo sencillo como un producto de matrices, como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es la matriz de coeficientes del sistema.

Generalizando, dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

dicho sistema puede ser expresado mediante un producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathrm{mxn}}$ la matriz de coeficientes del sistema,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathrm{nx1}}$ la matriz columna de las incógnitas, y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathrm{mx1}}$ la columna de los términos independientes.

Por lo tanto, la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales es:

$$AX = B$$

Si $B = O$, el sistema se llama homogéneo.

Repaso de SCD, SCI Y SI

Como habían estudiado en el Seminario de Ingreso, los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener una única solución (*sistema compatible determinado*), infinitas soluciones (*sistema compatible indeterminado*), o bien pueden no admitir solución (*sistema incompatible*).

Los sistemas homogéneos siempre son compatibles porque admiten al menos la solución trivial $X = O$.

Sistemas de ecuaciones lineales y determinantes

Consideremos el caso particular de los "sistemas cuadrados" (n ecuaciones con n incógnitas), cuya matriz de coeficientes es de nxn. Su expresión matricial es:

$$\underbrace{A}_{n\times n} \cdot \underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{B}_{n\times 1}$$

Si $\det(A) \neq 0$, A es inversible. Multiplicando ambos miembros por A^{-1} se obtiene:

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Como la inversa de una matriz es única, entonces el sistema tiene una única solución $X = A^{-1}B$.

En conclusión, dado un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\boxed{\det(A) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad sistema\ compatible\ determinado}$$

Ejemplo

Exprese el siguiente sistema de ecuaciones lineales como una ecuación matricial de la forma $AX = B$:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Resolución

El sistema lo podemos expresar como:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A por la fila 3:

$$\det(A) = 0.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

Como el determinante de A es distinto de 0, podemos hallar A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Como vimos previamente, la solución será:

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 3 \\ x + 5y = 5 \end{cases}$$

¿Qué representa geométricamente cada ecuación? Un plano.

¿Qué representa geométricamente la solución del sistema de ecuaciones? La intersección entre tres planos.

¿Cómo puede ser la intersección entre dos planos? Y entonces, ¿cómo es esperable que sea la intersección entre tres planos?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 0$, no podemos resolver el sistema mediante la matriz inversa. El sistema <u>no</u> es compatible determinado. Pero.... ¿podemos afirmar que no tiene solución?

Podría ocurrir que el sistema tuviera infinitas soluciones o que fuera incompatible. Para analizar esas alternativas utilizaremos el método de eliminación de Gauss.

Recordemos que las operaciones elementales entre filas son:

- Multiplicar una fila por un número diferente de cero
- Permutar filas
- Sumarle a una fila un múltiplo de otra

Estas operaciones transforman un sistema en otro equivalente que tiene el mismo conjunto solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ -1 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & 5 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ -1 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \\ 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Entonces un sistema de ecuaciones equivalente (tiene el mismo conjunto solución) y simplificado es:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z - 2y \\ z = 4 - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4 - 3y - 2y = 5 - 5y \\ z = 4 - 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5y \\ z = 4 - 3y \end{cases}$$

Entonces la solución es:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 5 - 5y \quad , \quad z = 4 - 3y\} = \{(5 - 5y, y, 4 - 3y) \in \mathbb{R}^3 \mid \ y \in \mathbb{R}\}$$

$$(5 - 5y, y, 4 - 3y) = (5,0,4) + (-5y, y, -3y) = (5,0,4) + y(-5,1,-3)$$

Si llamamos $y = \lambda$, resulta:

$$(x, y, z) = (-5,0,4\,) + \lambda(-5,1,-3) \quad , \ \lambda \in \ \mathbb{R}$$

Como el conjunto solución es una recta, podemos concluir que los tres planos pasan por la misma recta, o sea pertenecen al mismo haz de planos.

Ejemplo

Dado un sistema tal que $\det(A) = 0$, ¿podemos afirmar que admite infinitas soluciones?

Veamos el siguiente ejemplo en el cual la matriz de los coeficientes es la misma que en el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 3 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$$

Resolvamos con el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ -1 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & 5 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ -1 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 0 & 3 & 1 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \\ 0 & 3 & 1 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 3 & 1 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{5} \end{pmatrix}$$

La lectura de la tercera fila implica que $0 = -5$. Este absurdo significa que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

En los ejemplos anteriores observamos que si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Caso particular: Sistemas cuadrados homogéneos

Recordemos que todo sistema homogéneo es compatible porque admite al menos la solución trivial $X = O$. En este caso, el determinante permite clasificar el sistema.

Dado un sistema homogéneo $AX = O$, $con\ A \in \mathbb{R}^{nxn}$, puede afirmarse que:

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow SCD$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow SCI$$

Resumen: Clasificación de un sistema $n \times n$ por determinantes.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \det(A) \neq 0 \quad SCD & \\
B \neq 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & SCI \\
 & \det(A) = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & SI
\end{tikzcd}$$

Si el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo:

$$\begin{tikzcd}
 & \det(A) \neq 0 \quad SCD \\
B = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \det(A) = 0 \quad SCI
\end{tikzcd}$$

Ejemplo

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3k \\ 3 & k & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, hallar todos los valores de k para los cuales:

a) el sistema $AX = O$ admite infinitas soluciones;

b) el sistema $AX = B$ admite infinitas soluciones.

Resolución

a) Como el sistema es homogéneo, $\det(A) = 0 \implies SCI$

$$\det(A) = -3k^2 + 9k - 6 = 0 \iff k = 1 \lor k = 2$$

Por lo tanto, el sistema admite infinitas soluciones para $k = 1 \lor k = 2$.

b) En este caso el sistema no es homogéneo, por lo tanto el determinante no permite decidir si el sistema es compatible indeterminado. Les proponemos que resuelvan el sistema y respondan la pregunta.

EPL 7

Sean el plano $\pi\colon\ x + y - 2 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} 2y + 3kz - 2 = 0 \\ 3x + ky - 3z - 4 = 0 \end{cases}$

Obtener los valores de k para los cuales:

a) la recta corta al plano en un único punto;

b) la recta no interseca al plano;

c) la recta está incluida en el plano.

Sugerencia: Este ejercicio puede responderse sin hacer cálculos, teniendo en cuenta los resultados del ejemplo anterior