

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD

3

ESPACIOS
VECTORIALES

ÍNDICE

Definición de espacio vectorial	2
Propiedades de los espacios vectoriales	4
Propiedad 1	4
Propiedad 2.....	4
Propiedad 3.....	4
Propiedad 4.....	4
Subespacios vectoriales.....	4
Definición.....	4
Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios.....	5
Subespacios triviales.....	6
Ejercitación sobre subespacios.....	6
Resumen de los subespacios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	9
Combinación lineal.....	9
Definición.....	9
Conjunto generador	11
Subespacio generado	13
Independencia lineal y dependencia lineal.....	15
Propiedades	17
Propiedad 1	17
Propiedad 2.....	17
Interpretación geométrica	18
Base y dimensión de un espacio vectorial.....	19
Propiedades relacionadas con la dimensión	22
Coordenadas de un vector respecto de una base	24
Base y dimensión de un subespacio vectorial.....	27
Bases de subespacios definidos por generadores	30
Operaciones con subespacios	32
Intersección.....	32
Suma de subespacios.....	35
Suma directa.....	37
Ejemplos en $V = \mathbb{R}^3$	38
Teorema de la dimensión de la suma	41
Producto interno	42
Complemento ortogonal de un subespacio	43
Propiedades del complemento ortogonal	45

En las unidades anteriores vimos que el álgebra de vectores y el álgebra de matrices presentan similitudes. Pudimos observar que las propiedades de la suma (de vectores o de matrices) y del producto por un escalar son idénticas en ambos conjuntos.

En esta unidad, generalizaremos el concepto de vector a partir de estas propiedades en común que hemos señalado para vectores geométricos y matrices.

Definición de espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto no vacío V de objetos, llamados **vectores**, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar (número real) sujetas a los diez axiomas que se dan a continuación. Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} en V y todos los escalares α y β reales.

Llamamos $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a la suma de vectores en V , y $\alpha\mathbf{v}$ al producto de un número real α por un vector $\mathbf{v} \in V$.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

4. Existe un vector nulo $\mathbf{0}_V \in V$ tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0}_V = \mathbf{v}$

5. Para cada \mathbf{v} en V , existe un opuesto $(-\mathbf{v}) \in V$ tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$

6. $\alpha\mathbf{v} \in V$

7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

8. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$

9. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$

10. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Observación: En la definición anterior, cuando decimos "escalares" nos estamos refiriendo a números reales. En este caso, se dice que V es un *espacio vectorial real*.

También es posible que los escalares pertenezcan a otro conjunto numérico, por ejemplo los números complejos con los cuales trabajaremos en la última unidad.

Ejemplo 1

De acuerdo con las propiedades que vimos en la primera unidad, podemos afirmar que \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial.

Los espacios \mathbb{R}^n , con $n \geq 1$, son los ejemplos principales de espacios vectoriales. La intuición geométrica desarrollada para \mathbb{R}^3 nos ayudará a entender y visualizar muchos conceptos de esta unidad.

Los vectores de \mathbb{R}^n son n-uplas de números reales, o sea:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ con } x_i \in \mathbb{R}\}$$

En \mathbb{R}^n , la suma de vectores y el producto por un escalar se definen así:

$$\text{Sean } u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ y } v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Puede comprobarse que las operaciones definidas verifican los axiomas de espacio vectorial.

Ejemplo 2

De acuerdo con las propiedades enunciadas en la segunda unidad, para cada m y n $\mathbb{R}^{m \times n}$ es un espacio vectorial.

Tenemos por ejemplo $\mathbb{R}^{2 \times 3}$, espacio vectorial cuyos vectores son las matrices de 2×3 .

Ejemplo 3

Llamemos P_2 al conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2, incluyendo el polinomio nulo.

Recordemos la suma de polinomios y la multiplicación por un escalar:

$$\text{Dados } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2 \text{ y } q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$$

Definimos las operaciones:

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in P_2$$

$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 \in P_2$$

Puede demostrarse que estas operaciones verifican todos los axiomas de espacio vectorial.

En particular, el vector nulo en este espacio es el *polinomio nulo*, es decir el polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero.

Generalizando, para cualquier $n \geq 0$, el conjunto P_n de todos los polinomios de grado menor o igual que n (incluyendo el polinomio nulo) es un espacio vectorial.

Observación:

¿Por qué no definimos P_n como el conjunto de polinomios de grado exactamente igual a n ? Si lo definiéramos así, no sería un espacio vectorial como se muestra en el siguiente ejemplo:

$p(x) = x^2$ y $q(x) = -x^2 + 1$ son polinomios de grado 2, pero la suma es un polinomio de grado cero. Entonces no se verificaría el primer axioma de espacio vectorial (la suma de vectores de un espacio vectorial V debe estar en V).

Propiedades de los espacios vectoriales

A partir de los axiomas de espacios vectoriales, pueden demostrarse estas propiedades que resultan “naturales”:

Propiedad 1

$$0 \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$$

Propiedad 2

$$\alpha \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$$

Propiedad 3

$$(-\alpha)\mathbf{u} = -(\alpha\mathbf{u})$$

En particular, para $\alpha = 1$:

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

Propiedad 4

$$\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$$

Veamos cómo puede demostrarse esta última propiedad:

Si $\alpha = 0$, se cumple la proposición.

Si $\alpha \neq 0$, podemos multiplicar por $\frac{1}{\alpha}$:

$$\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}_V \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \alpha \mathbf{u} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{0}_V \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_V \quad \text{¡demostrado!}$$

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V .

W es un **subespacio** de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones (suma de vectores y producto por un escalar) definidas en V .

Ejemplo

$W = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 3x_1 \}$ ¿es un subespacio de \mathbb{R}^2 ?

Primero analicemos el conjunto W . Son todos vectores de \mathbb{R}^2 tales que la segunda componente es el triple de la primera:

$$(x_1, 3x_1) = x_1(1, 3)$$

W es la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(1, 3)$, o sea la recta de ecuación $y = 3x$.

Para decidir si W es un subespacio de \mathbb{R}^2 habría que verificar que se cumplen los axiomas del 1 al 10. El lector puede comprobar que todos se cumplen en este caso.

Pero en general no es necesario verificar los axiomas porque existe un criterio sencillo para determinar si un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio, es el que sigue.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V ($W \subseteq V$).

W es **subespacio** de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\mathbf{0}_V$ está en W .
- Si \mathbf{u} y \mathbf{v} están en W , entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en W .
- Si \mathbf{u} está en W y k es un escalar, $k\mathbf{u}$ está en W .

Observaciones

1. La condición (a) asegura que W no es vacío. La mejor manera de comprobar si W es un subespacio es buscar primero si contiene al vector nulo. Si $\mathbf{0}_V$ está en W , entonces deben verificarse las propiedades (b) y (c). Si $\mathbf{0}_V$ no está en W , W no puede ser un subespacio y no hace falta verificar las otras propiedades.

2. Las propiedades a, b y c corresponden a los axiomas 4, 1 y 6 de espacios vectoriales.

3. Los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 de espacio vectorial se cumplen para W porque éste es un subconjunto de V . Puede decirse que W "hereda" esas propiedades de V .

4. Faltaría comprobar que cada vector de W tiene su opuesto en W (axioma 5 de espacios vectoriales):

Teniendo en cuenta la condición (c) de subespacios,

c. Si u está en W y k es un escalar, ku está en W .

Si tomamos $k = -1$, resulta:

Para cada $u \in W$, $(-1)u = -u \in W$.

Y por lo tanto cada vector de W tiene su opuesto en W .

De las observaciones anteriores se deduce que las condiciones (a), (b) y (c) son suficientes para demostrar que W es un espacio vectorial, y por lo tanto subespacio de V .

Subespacios triviales

Si V es un espacio vectorial, entonces V es un subespacio de sí mismo.

El conjunto $\{0_V\}$, que contiene sólo al vector nulo del espacio, también es subespacio de V pues:

$$0_V + 0_V = 0_V \quad \text{y} \quad k0_V = 0_V \quad \text{para cualquier } k \text{ real}$$

Los subespacios $\{0_V\}$ y V se denominan *subespacios triviales* de V .

Ejercitación sobre subespacios

Ejemplo 1

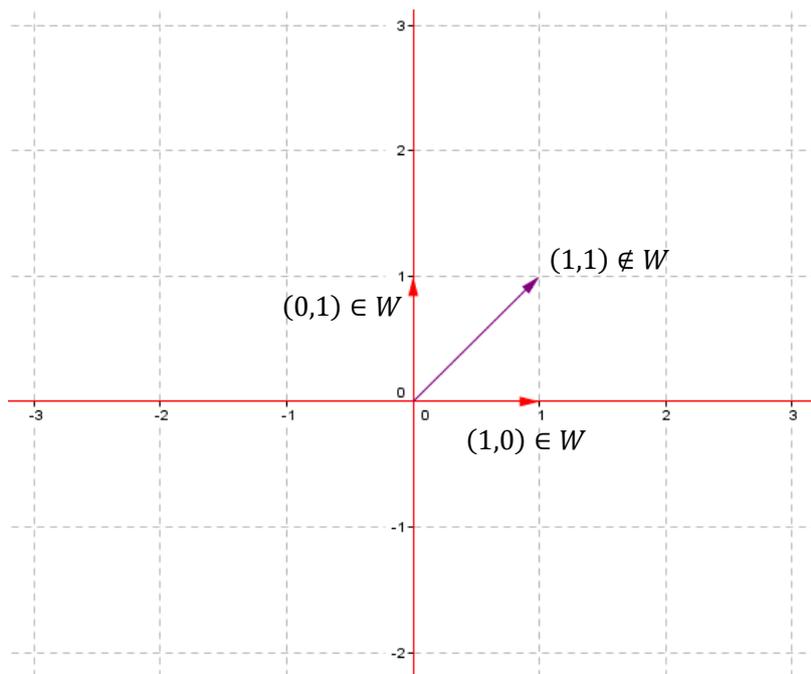
Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, ¿Es un subespacio de \mathbb{R}^2 ?

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Se cumple (a) pues $(0,0) \in W$

No se cumple (b) porque la suma de dos vectores de W puede no estar en W , por ejemplo:

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W$$



Entonces W no es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Es decir, la recta de ecuación $x = 0$. ¿Es un subespacio de \mathbb{R}^2 ?

Se cumple (a) pues $(0,0) \in W$

Se cumple (b) pues la suma de dos vectores de W , está en W :

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2)$$

Se cumple (c) pues el producto de un vector de W por un número real está en W :

$$k(0, y) = (0, ky)$$

Luego W es subespacio de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 3

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$. ¿Es un subespacio de \mathbb{R}^2 ?

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = x \vee y = -x$$

Se cumple (a) pues $(0,0) \in W$

No se cumple (b) porque la suma de dos vectores de W puede no estar en W , por ejemplo:

$$(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin W$$

Entonces W no es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$. Es decir un plano que pasa por el origen. ¿Es un subespacio de \mathbb{R}^3 ?

De la ecuación del plano se deduce que: $x = -y - 2z$

Por lo tanto los vectores que pertenecen a W responden a la forma $(-y - 2z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$.

Se cumple (a) pues $(0,0,0) \in W$

Se cumple (b) pues la suma de dos vectores del plano, sigue estando en ese plano:

$$(-y - 2z, y, z) + (y' - 2z', y', z') = (-(y + y') - 2(z + z'), y + y', z + z')$$

Se cumple (c) pues $k(-y - 2z, y, z) = (-ky - 2kz, ky, kz) \in W$

Entonces W es subespacio de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 5

Consideremos el conjunto $W = \{p \in P_2 \mid p(0) = 0\}$. Es decir, los polinomios de grado menor o igual que 2 (incluyendo el polinomio nulo) tales que evaluados en 0 dan por resultado 0. ¿Es un subespacio de P_2 ?

Se cumple (a) pues el polinomio nulo pertenece a W .

Recordemos la definición de suma de funciones y de producto de un real por una función:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ para todo } x \text{ perteneciente al dominio de } f \text{ y de } g$$

$$(kf)(x) = k f(x) \text{ para todo } x \text{ perteneciente al dominio de } f$$

Los polinomios son funciones, por lo tanto si consideramos $p, q \in W$, resulta:

$$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in W$$

$$(kp)(0) = k p(0) = k 0 = 0 \Rightarrow kp \in W$$

Demostremos que W es un subespacio de P_2 .

Ejemplo 6

Consideremos el conjunto $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$. Es decir, el conjunto de matrices simétricas de 2×2 .

Se cumple (a) porque la matriz nula pertenece a W .

Se cumple (b) pues si $A, B \in W$ entonces $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$, luego $(A + B) \in W$

Se cumple (c) pues si $A \in W$ entonces $(kA)^t = kA^t = kA$, luego $(kA) \in W$

Demostramos que el conjunto de matrices simétricas de 2×2 es un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Observación: En la comprobación de las condiciones (a), (b) y (c) no fue necesario hacer referencia al tamaño de las matrices. Esto significa que es válido para matrices simétricas de $n \times n$.

Ejemplo 7

Consideremos el conjunto $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) = 0\}$. ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?

Se cumple (a) porque la matriz nula pertenece a W .

En general $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, entonces podría ocurrir que $A, B \in W$ pero que $A + B$ no esté en W . Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Entonces no se cumple (b).

W no es un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Resumen de los subespacios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Después de estos ejemplos podemos resumir cuales son los diferentes tipos de subespacios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 :

Subespacios de \mathbb{R}^2	Subespacios de \mathbb{R}^3
<ul style="list-style-type: none"> • $\{(0,0)\}$ • Rectas que pasan por el origen • \mathbb{R}^2 (como subespacio de sí mismo) 	<ul style="list-style-type: none"> • $\{(0,0,0)\}$ • Rectas que pasan por el origen • Planos que pasan por el origen • \mathbb{R}^3 (como subespacio de sí mismo)

No hay ninguna otra clase de subespacios en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Combinación lineal

Definición

Sean v_1, v_2, \dots, v_r, w vectores de un espacio vectorial V . Se dice que el vector w es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_r si se puede expresar como sigue:

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

donde k_1, k_2, \dots, k_r son escalares.

Observación: Nosotros estamos trabajando con espacios vectoriales reales, o sea que los escalares son números reales.

Ejemplo 1

El vector $(0,0,3)$ es combinación lineal de $(0,0,1)$ ya que

$$(0,0,3) = 3(0,0,1)$$

Veamos cómo se puede pensar esto desde la perspectiva geométrica. ¿Qué vectores pueden expresarse como combinación lineal del vector $(0,0,1)$?

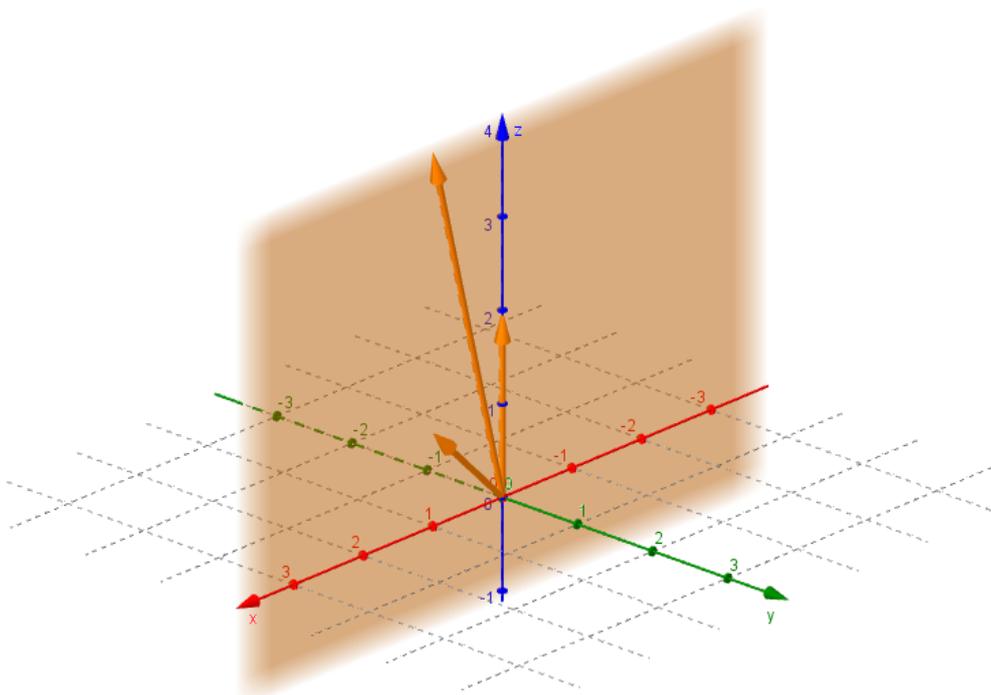
Todos los vectores $(0,0,k)$ con $k \in \mathbb{R}$. Es decir que todos los vectores sobre el eje z , son combinación lineal de $(0,0,1)$.

Ejemplo 2

El vector $(1,0,4)$ es combinación lineal de $(1,0,1)$, $(0,0,2)$ ya que:

$$1 \cdot (1,0,1) + \frac{3}{2} \cdot (0,0,2) = (1,0,4)$$

Geoméricamente el vector $(1,0,4)$ es un vector coplanar con los vectores $(1,0,1)$ y $(0,0,2)$. Se puede ver en la siguiente gráfica que pertenecen al plano $y = 0$:



Ejemplo 3

El vector $8x - 4x^2$ es combinación lineal de los vectores x y x^2 ya que:

$$8x - 4x^2 = 8 \cdot (x) + (-4) \cdot x^2$$

Ejemplo 4

¿Es el vector $(1,8)$ combinación lineal de los vectores $(1,0)$, $(3,3)$?

Para responder esto debemos buscar si existen escalares α, β tales que:

$$(1,8) = \alpha(1,0) + \beta(3,3)$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + 3\beta \\ 8 = 3\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -7, \beta = \frac{8}{3}$$

Como existen escalares que satisfacen la igualdad entonces $(1,8)$ es combinación lineal de $(1,0)$, $(3,3)$.

Ejemplo 5

¿Para qué valores de k el vector $(1,2,3)$ combinación lineal de los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,2,k)$?

Para responder esto debemos buscar si existen escalares α, β, γ tales que:

$$(1,2,3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,2,k)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2\gamma = 2 \\ \gamma k = 3 \end{cases}$$

Si $k = 0$ la tercera ecuación queda $0 = 3$, y el sistema es incompatible. Si $k \neq 0$ entonces se puede obtener γ y β .

Entonces para todo $k \neq 0$ el vector $(1,2,3)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores dados.

Conjunto generador

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V .

Si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_r , entonces se dice que $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un **conjunto generador de V** o también que v_1, v_2, \dots, v_r *generan* V .

Ejemplo 1

¿Es el conjunto $\{(1,1), (1,-1)\}$ generador de \mathbb{R}^2 ?

Siguiendo la definición, debemos ver si cualquier vector de \mathbb{R}^2 puede expresarse como combinación lineal de $(1,1)$, $(1,-1)$:

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2}$$

Hemos llegado a un sistema compatible determinado. Para cada x e y se obtendrá un valor para α y para β .

Entonces, como cualquier vector (x, y) de \mathbb{R}^2 puede expresarse como combinación lineal de $(1,1)$, $(1,-1)$, decimos que $\{(1,1), (1,-1)\}$ es un conjunto generador de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2

¿Es el conjunto $\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ generador de \mathbb{R}^2 ?

Otra vez planteamos un sistema de ecuaciones. Nos interesa saber si tiene solución o no:

$$(x, y) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) + \gamma(2,0) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + 2\gamma \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$$

Veamos cómo es la resolución por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & -2 & y - x \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ \beta + \gamma = \frac{x-y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma + \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} - \gamma \end{cases}$$

Para cada (x, y) en \mathbb{R}^2 , el sistema es compatible (indeterminado). Entonces $\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ también genera \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 3

¿Es el conjunto $(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)$ generador de \mathbb{R}^3 ?

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y - z \\ \gamma = z \end{cases}$$

Como el sistema es compatible (determinado), podemos afirmar que el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ genera \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 4

¿Qué vectores pueden expresarse como combinación lineal del $(1,0)$?

Los vectores de la forma $(x, 0)$. Entonces el vector $(1,0)$ no genera todo \mathbb{R}^2 , pero genera la recta $y = 0$.

Ejemplo 5

¿Qué vectores pueden expresarse como combinación lineal de $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$?

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (\alpha, \beta, 0)$$

Es decir todos los vectores con componente $z = 0$. Entonces $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ no generan \mathbb{R}^3 sino el plano $z = 0$.

Subespacio generado

Sean v_1, v_2, \dots, v_r vectores de un espacio vectorial V .

1. El vector nulo puede expresarse como combinación lineal de dichos vectores:

$$0_V = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_r$$

2. Si sumamos dos combinaciones lineales de los vectores dados, obtenemos otra combinación lineal:

$$(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) + (b_1 v_1 + \dots + b_r v_r) = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_r + b_r) v_r$$

3. Si multiplicamos un escalar k por una combinación lineal de los vectores dados, obtenemos una combinación lineal de dichos vectores:

$$k (a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) = (k a_1) v_1 + \dots + (k a_r) v_r$$

Estas tres condiciones permiten afirmar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_r es un subespacio de V .

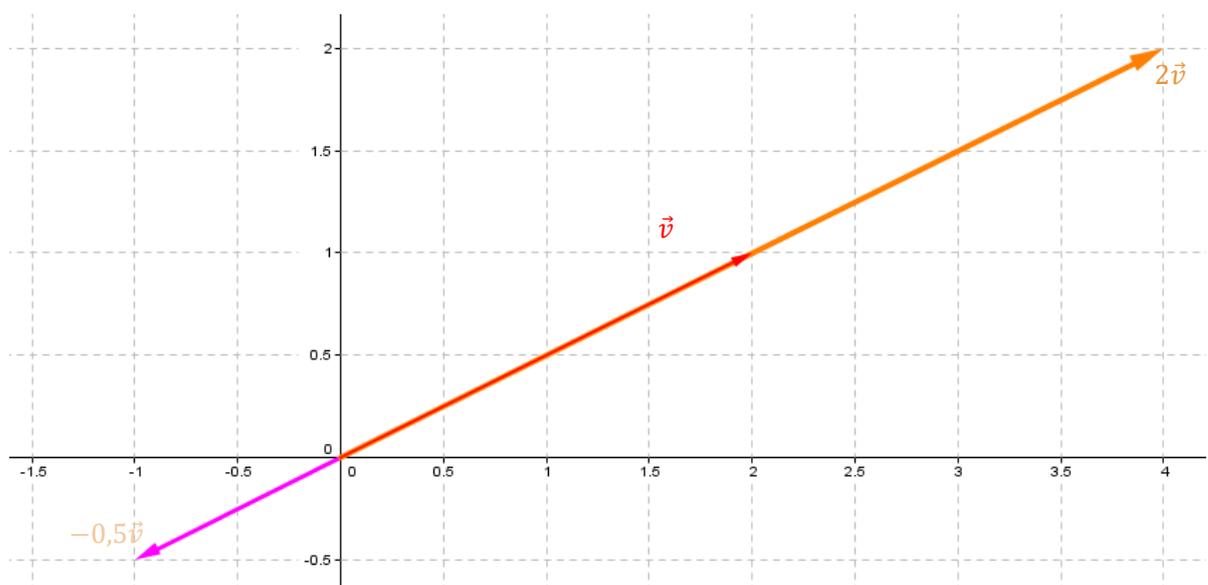
Entonces:

Dados los vectores v_1, v_2, \dots, v_r en V , llamamos **subespacio generado** por v_1, v_2, \dots, v_r al conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores. Lo denotamos con la expresión $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$.

$$\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_r\} = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r, \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R}\} \text{ subespacio de } V$$

Ejemplo 1

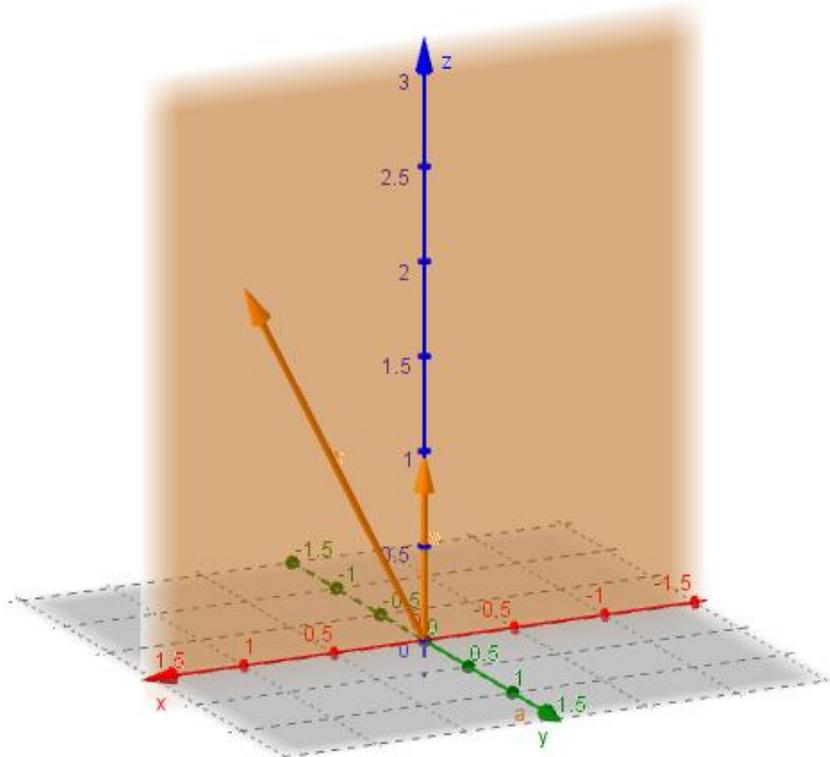
Las combinaciones lineales del vector $(2,1)$ son todos los vectores de la forma $(2k, k)$ con $k \in \mathbb{R}$.



Geoméricamente el subespacio generado por $(2,1)$ es la recta que pasa por el origen y tiene la dirección de dicho vector.

Ejemplo 2

Las combinaciones lineales de los vectores $(1,0,2)$, $(0,0,1)$ son los vectores coplanares con $(1,0,2)$ y $(0,0,1)$:



Veamos, analíticamente, cual es el espacio generado por $(1,0,2)$, $(0,0,1)$:

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,2) + \beta(0,0,1) = (\alpha, 0, 2\alpha + \beta) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Son todos los vectores con segunda componente nula. Es decir que el subespacio generado es el plano $y = 0$.

O sea: $\text{gen}\{(1,0,2), (0,0,1)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$

Ejemplo 3

Tomemos los vectores del ejemplo anterior: $(1,0,2)$, $(0,0,1)$ y además el vector $(-1,0,1)$.

¿Qué espacio generan?

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,2) + \beta(0,0,1) + \gamma(-1,0,1) = (\alpha - \gamma, 0, 2\alpha + \beta + \gamma)$$

Son vectores con segunda componente nula. Se genera el mismo subespacio que en el ejemplo anterior. Esto se explica porque el tercer vector es coplanar con los primeros dos.

Independencia lineal y dependencia lineal

En los ejemplos 1 y 2 (de *Conjunto generador*) vimos que los conjuntos $\{(1,1), (1,-1)\}$ y $\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ generan \mathbb{R}^2 . Si tuviéramos que elegir uno de ellos como generador de \mathbb{R}^2 , ¿por cuál nos inclinaríamos?

El problema de encontrar los conjuntos generadores más “pequeños” para un espacio vectorial depende de la noción de independencia lineal, que presentamos en esta sección.

Si $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V , entonces la ecuación vectorial

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = 0_V$$

tiene al menos la solución trivial: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$

Si ésta es la única solución, entonces se dice que A es un **conjunto linealmente independiente**.

Si hay otras soluciones (además de la trivial) entonces A es un **conjunto linealmente dependiente**.

Una forma alternativa de caracterizar la *dependencia lineal* es la siguiente:

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si y sólo si al menos uno de los vectores puede expresarse como combinación lineal de los demás. **[1]**

Demostración:

\Rightarrow Si el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es *linealmente dependiente*, la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = 0_V$$

admite otras soluciones además de la trivial. O sea, existe una combinación lineal donde al menos uno de los escalares es distinto de cero, que da el vector nulo.

Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces resulta:

$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)v_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_r}{\alpha_1}\right)v_r$$

Por lo tanto, el vector v_1 es combinación lineal de los demás.

⇐ Sabemos que uno de los vectores puede expresarse como combinación de los demás. Sin perder generalidad, supongamos que:

$$v_1 = k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

Entonces: $-1v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0_V$

Existe una combinación lineal no trivial (al menos uno de los escalares es distinto de cero) que es igual al vector nulo. Por lo tanto, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es *linealmente dependiente*, como queríamos demostrar.

Ejemplo 1

¿Es el conjunto $\{(1,1), (1,-1)\}$ LI o LD?

Planteamos la ecuación:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

Luego el conjunto es LI.

Ejemplo 2

¿Es el conjunto $\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ LI o LD?

Planteamos un sistema de ecuaciones. Nos interesa saber si tiene solución única o infinitas soluciones:

$$\alpha(1,1) + \beta(1,-1) + \gamma(2,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases}$$

Veamos cómo es la resolución por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, o sea tiene infinitas soluciones. Luego, el conjunto es LD.

Notemos que también se cumple la forma alternativa de caracterizar la dependencia lineal, pues es posible escribir $(2,0)$ como combinación lineal de $(1,1)$ y $(1,-1)$:

$$(1,1) + (1,-1) = (2,0)$$

Ejemplo 3

¿Es el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ LI o LD?

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + \gamma \\ 0 = \beta + \gamma \\ 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Como el sistema es compatible determinado, el conjunto es LI.

Ejemplo 4

¿Es el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ LI o LD?

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Como el sistema tiene solución única el conjunto es LI.

Ejemplo 5

¿Es el conjunto $\{x, -x^2, 4x^2 - x\}$ LI o LD?

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(-x^2) + \alpha_3(4x^2 - x) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 4\alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado. Luego el conjunto es LD.

Notemos que es posible escribir $4x^2 - x$ como combinación lineal de x y de $-x^2$:

$$(-1)(x) + (-4)(-x^2) = 4x^2 - x$$

Propiedades

Propiedad 1

Un conjunto formado por un solo vector, ¿es linealmente independiente (LI) o dependiente (LD)?

Planteamos la combinación lineal:

$$\alpha v = 0_V$$

Si $v = 0_V$, α puede tomar cualquier valor. Por lo tanto: $\{0_V\}$ es LD.

Si $v \neq 0_V$, la única solución es $\alpha = 0$. Por lo tanto: $\{v\}$ es LI.

Propiedad 2

Si un conjunto de vectores contiene al vector nulo, entonces es linealmente dependiente (LD).

Demostración:

Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r, 0_V\} \subset V$

Entonces se tiene que:

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_r + 1 \cdot 0_V = 0_V$$

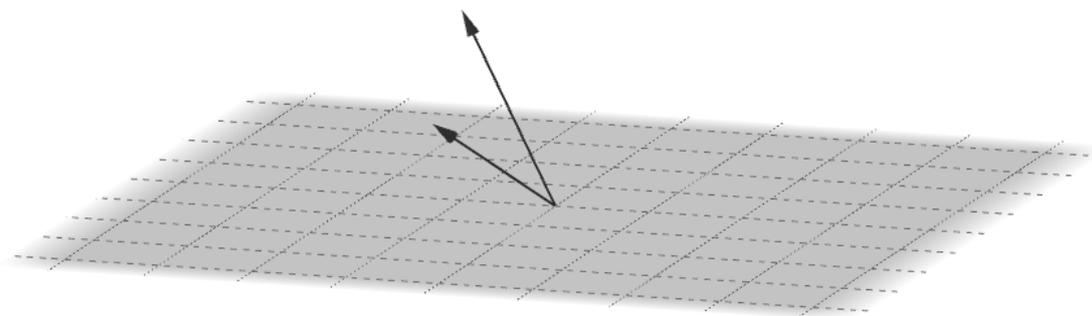
Probamos que existe una combinación lineal con escalares no todos nulos, que da el vector nulo. Por lo tanto, A es linealmente dependiente.

Interpretación geométrica

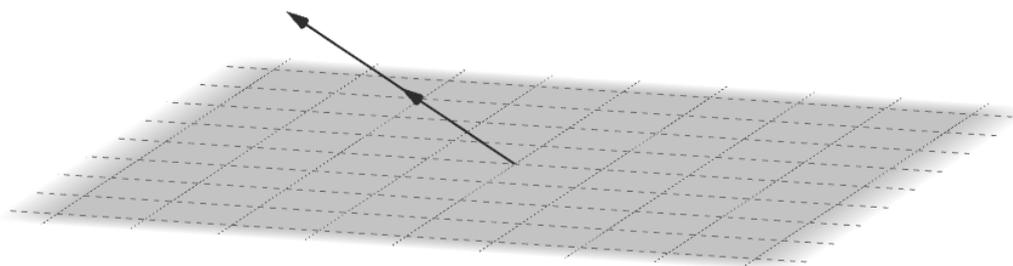
Observación previa: En lo que sigue consideramos los vectores colocados a partir del origen de coordenadas.

De [1] resulta que dos vectores v_1 y v_2 son linealmente dependientes (LD) si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

Podemos afirmar entonces que dos vectores en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 son LD si y sólo si están sobre la misma recta que pasa por el origen (vectores paralelos).

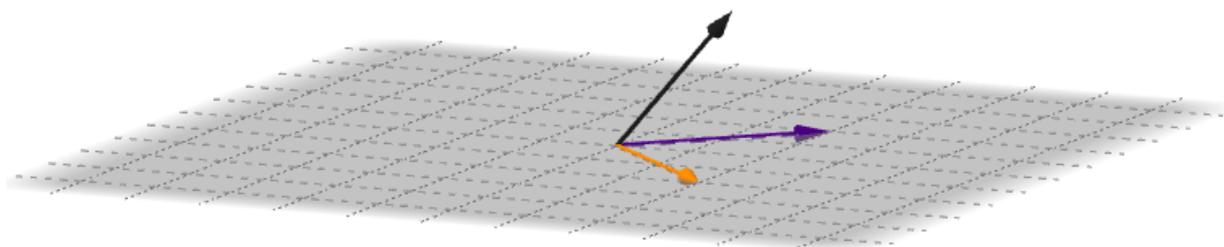
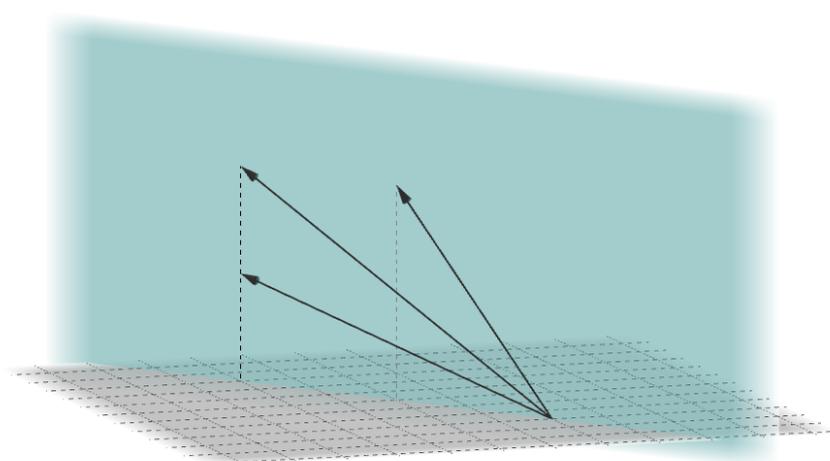


Dos vectores LI en \mathbb{R}^3



Dos vectores LD en \mathbb{R}^3

En \mathbb{R}^3 , tres vectores v_1, v_2, v_3 son LD si y sólo si están situados en el mismo plano que pasa por el origen (vectores coplanares).

Tres vectores LI en \mathbb{R}^3 Tres vectores LD en \mathbb{R}^3

Base y dimensión de un espacio vectorial

Habíamos visto que los conjuntos $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $C = \{(1, 1), (1, -1), (2, 0)\}$ generan \mathbb{R}^2 . ¿Cuál es la diferencia entre ellos?

B es un conjunto linealmente independiente, en cambio C es linealmente dependiente porque $(2, 0) = (1, 1) + (1, -1)$.

Un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial V se denomina **base** de V si y sólo si:

- i. B es linealmente independiente;
- ii. B genera a V .

Teniendo en cuenta esta definición, $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 . Otra base de \mathbb{R}^2 muy usual es la que contiene a los versores canónicos: $E = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Observamos que las dos bases están compuestas por dos vectores linealmente independientes. ¿Será ésta una característica de cualquier base de \mathbb{R}^2 ?

Puede demostrarse que:

Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces todo conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.

De acuerdo con esta propiedad, podemos deducir una característica común a toda base de un espacio vectorial:

Sean $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ dos bases del espacio vectorial V .

Como B es una base, todo conjunto de más de n vectores es LD. Pero B' es LI, entonces: $q \leq n$. [1]

Como B' es una base, todo conjunto de más de q vectores es LD. Pero B es LI, entonces: $n \leq q$. [2]

De [1] y [2] se deduce que $q = n$.

En consecuencia:

Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V , cualquier otra base de V tiene n vectores. Esto permite definir el concepto de dimensión.

La **dimensión** de un espacio vectorial V es la cantidad de vectores que componen una base de V .

Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V , la dimensión de V es n y lo indicamos como **$\dim(V) = n$** .

Si no existe una base de V formada por un conjunto finito de vectores, se dice que V es un espacio de dimensión infinita. Un ejemplo es el espacio de todos los polinomios (de cualquier grado).

Como el vector nulo es linealmente dependiente, el espacio $\{0_V\}$ no tiene base. A este espacio compuesto únicamente por el vector nulo, se le asigna dimensión cero: $\dim(\{0_V\}) = 0$

Para determinar la dimensión de un espacio vectorial, es suficiente hallar una base de dicho espacio. Veamos qué dimensión tienen los espacios vectoriales con los cuales trabajaremos:

En \mathbb{R}^2 conocemos la base canónica:

$$E_2 = \{(1,0), (0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

En \mathbb{R}^3 la base canónica es:

$$E_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Análogamente en \mathbb{R}^4 :

$$E_4 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

De acuerdo con el número de vectores que componen cada una de estas bases, podemos afirmar que:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Para determinar la dimensión de los espacios de matrices, consideremos por ejemplo $V = \mathbb{R}^{3 \times 2}$. Cualquier matriz de 3×2 puede expresarse como sigue:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos la similitud con \mathbb{R}^6 , sólo cambia el formato.

Encontramos seis matrices linealmente independientes que generan $V = \mathbb{R}^{3 \times 2}$. Es decir, encontramos una base (llamada base canónica) de este espacio y por lo tanto: $\dim(\mathbb{R}^{3 \times 2}) = 3 \times 2 = 6$.

Generalizando, podemos afirmar que:

$$\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = m \times n$$

Busquemos la dimensión de los espacios de polinomios. Consideremos por ejemplo $V = P_2$. Cualquier polinomio de P_2 puede expresarse como sigue:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{x}^2$$

El conjunto $\{1, x, x^2\}$ genera P_2 y además es linealmente independiente. Hemos obtenido una base (llamada canónica) de P_2 , y por lo tanto $\dim(P_2) = 3$.

Análogamente:

$$\{1, x, x^2, x^3\} \text{ base canónica de } P_3$$

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\} \text{ base canónica de } P_n$$

Entonces:

$$\dim(P_n) = n + 1$$

Ejemplo 1

Existen diferentes bases para un mismo espacio vectorial. Consideremos en \mathbb{R}^2 el conjunto:

$$B = \{(1,0), (1,1)\}$$

Es fácil ver que B es linealmente independiente (sólo la combinación lineal trivial produce el vector nulo). Nos falta probar que genera \mathbb{R}^2 .

$$(x, y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \end{cases} \Rightarrow \alpha = x - y \wedge \beta = y$$

Para cualquier (x, y) en \mathbb{R}^2 es posible encontrar los escalares α y β . Probamos que B genera \mathbb{R}^2 .

Entonces $B = \{(1,0), (1,1)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2

Hemos visto en ejemplos anteriores que el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ genera \mathbb{R}^3 , y que son vectores LI. Por lo tanto es una base de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 3

Veamos que el conjunto $B = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ es una base de P_2 .

Para esto debemos probar las dos condiciones.

Probemos que B es LI:

$$0 + 0x + 0x^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Cómo la única solución es la trivial, entonces el conjunto es LI.

Probemos que genera P_2 :

$$a + bx + cx^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - b - c \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases}$$

El sistema es compatible. Entonces para cualquier polinomio en P_2 es posible hallar los escalares α, β, γ . Luego B genera P_2 .

Propiedades relacionadas con la dimensión

Si $\dim(V) = n$, puede afirmarse que:

- 1) Todo conjunto de n vectores linealmente independientes en V es una base.
- 2) Todo conjunto de n vectores que genere V es una base.
- 3) Todo conjunto de más de n vectores en el espacio vectorial V es linealmente dependiente.
- 4) Todo conjunto linealmente independiente en V puede extenderse a una base.

Ejemplo 1

¿Es el conjunto $A = \{(1,1,0), (2, -1,1), (0,1,0)\}$ base de \mathbb{R}^3 ?

Cómo $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y A tiene tres vectores, entonces por la propiedad 1, es suficiente probar que A es LI para asegurar que es una base de \mathbb{R}^3 .

En \mathbb{R}^3 , tres vectores v_1, v_2, v_3 son LD si y sólo si están situados en el mismo plano que pasa por el origen (vectores coplanares). Veamos si son coplanares haciendo el producto mixto:

$$(1,1,0) \cdot (2,-1,1) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

No son coplanares, por lo tanto son LI.

Luego A es base de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 2

$$C = \{1 + x + x^2, 3 - x, 2 + kx^2\} \subset P_2$$

Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que C sea una base de P_2 .

$\dim(P_2) = 3 \Rightarrow$ Todo conjunto de tres vectores L.I. en P_2 es base.

$$\alpha(1 + x + x^2) + \beta(3 - x) + \gamma(2 + kx^2) = 0_{P_2}$$

Igualando coeficientes, resulta:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + k\gamma = 0 \end{cases}$$

Como es un sistema homogéneo, siempre tiene solución. ¿Buscamos que tenga solución única, o infinitas?

Buscamos los valores de k para que la única solución sea la trivial: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

En la unidad anterior habíamos visto que en los sistemas cuadrados homogéneos, el determinante de la matriz de coeficientes permite decidir si son SCD o SCI.

En este caso, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ y $\det(A) = 2 - 4k$

Si $k = \frac{1}{2}$ el sistema queda compatible indeterminado.

Para cualquier $k \neq \frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado, por lo tanto $\{1 + x + x^2, 3 - x, 2 + kx^2\}$ es LI, y entonces es base de P_2 .

Ejemplo 3

Dado $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^3$ puede afirmarse que este conjunto es LD. Si hubiera tres vectores LI, éstos formarían una base de \mathbb{R}^3 y por lo tanto el vector restante podría expresarse como combinación lineal de ellos.

Ejemplo 4

El conjunto $\{u = (1,2,3), v = (1,1,0)\}$ es LI en \mathbb{R}^3 pero no genera todo \mathbb{R}^3 sino que genera un plano. Podemos extenderlo a una base agregando algún vector LI, podría ser por ejemplo el producto vectorial entre estos dos. Obtenemos $\{u, v, u \times v\}$ que es una base de \mathbb{R}^3 .

Coordenadas de un vector respecto de una base

Propiedad: Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V , todo vector de V puede expresarse de forma única como combinación lineal de los vectores de B .

Demostración:

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V .

Supongamos que un vector $u \in V$ puede expresarse mediante dos combinaciones lineales distintas de los vectores de la base B :

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{y} \quad u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

Restando miembro a miembro, se obtiene:

$$0_V = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$

Como las bases son conjuntos linealmente independientes, resulta:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Por lo tanto, los escalares de la combinación lineal son únicos para cada vector de V .

Esta propiedad permite definir *coordenadas de un vector respecto de una base*.

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V .

Para cada $u \in V$, existen únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Estos escalares se denominan **coordenadas del vector u respecto de la base B** .

Indicaremos las coordenadas mediante la siguiente notación:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Sean,

$$B = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,2,1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$u = (-1,4,3)$$

a) Hallar:

- $[u]_B$, coordenadas del vector u en la base B
- $[u]_E$, coordenadas del vector u en la base canónica

b) Sabiendo que:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hallar v .

Resolución

Ítem a

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(2,2,1) = (-1,4,3)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \beta + 2\gamma = 4 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Estos escalares son las coordenadas de u en la base B :

$$[u]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En el caso de la base canónica, las coordenadas del vector coinciden con sus componentes, ya que:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Entonces:

$$[u]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ítem b

Dadas una base y las coordenadas de un vector en esa base, podemos hallar el vector:

$$v = 3(1,0,0) + 1(1,1,0) + 2(2,2,1) = (8,5,2)$$

Observación: Las bases son conjuntos ordenados. O sea, si reordenamos los vectores de una base, obtenemos una base diferente. Así:

$B = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,2,1)\}$ y $B' = \{(2,2,1), (1,0,0), (1,1,0)\}$ son bases distintas de \mathbb{R}^3 .

¿Por qué son distintas? Porque las coordenadas de un vector cambian si se reordena la base. Por ejemplo para $u = (-1,4,3)$ las coordenadas en cada base son:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad [u]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Dados los vectores de \mathbb{R}^2 , y sus coordenadas en la base B :

$$u = (5,2) , \quad v = (7,1)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hallar, si es posible, la base B .

Resolución

Una base B de \mathbb{R}^2 tiene dos vectores:

$$B = \{v_1, v_2\}$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3v_1 + 2v_2 = (5,2)$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 5v_1 + 3v_2 = (7,1)$$

Entonces podemos resolverlo como un sistema de ecuaciones vectorial:

$$\begin{cases} 3v_1 + 2v_2 = (5,2) \\ 5v_1 + 3v_2 = (7,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15v_1 + 10v_2 = (25,10) \\ 15v_1 + 9v_2 = (21,3) \end{cases}$$

Restando las ecuaciones, se obtiene:

$$v_2 = (4,7)$$

Sustituyendo y despejando, resulta: $v_1 = (-1, -4)$.

Entonces

$$B = \{(-1, -4), (4,7)\}$$

Base y dimensión de un subespacio vectorial

Recordemos que un subespacio es un espacio vectorial en sí mismo, por lo tanto podemos hallar una base y su dimensión.

Si S es un subespacio de V , entonces: $\dim(S) \leq \dim(V)$.

Veamos cuáles son las dimensiones de los distintos tipos de subespacios de \mathbb{R}^3 :

- $\{(0,0,0)\}$
- Rectas que pasan por el origen,
- Planos que pasan por el origen y
- \mathbb{R}^3

Sabemos que \mathbb{R}^3 tiene dimensión 3.

$S = \{(0,0,0)\}$ no tiene base y como habíamos dicho, se le asigna dimensión 0.

$$\dim(\{0_V\}) = 0$$

Consideremos un plano que pase por el origen, por ejemplo:

$$\pi: x + 3y - 2z = 0$$

$$x = -3y + 2z$$

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) = (-3y + 2z, y, z) = (-3y, y, 0) + (2z, 0, z) = y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

Esto quiere decir que cualquier vector en ese plano se puede escribir como combinación lineal de $(-3, 1, 0)$ y $(2, 0, 1)$. Cómo son LI:

$$\{(-3, 1, 0), (2, 0, 1)\} \text{ es una base de } S_1$$

$$\dim(S_1) = 2$$

Los planos que pasan por el origen son subespacios de dimensión 2.

Ahora consideremos el subespacio:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, x - y - z = 0\}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 & \pi_1 \\ x - y - z = 0 & \pi_2 \end{cases}, \pi_1 \cap \pi_2 = r$$

La intersección de dos planos no paralelos es una recta. ¿Cómo podemos encontrar una base de una recta?

$$y = -x$$

$$\Rightarrow x - (-x) - z = 0 \Rightarrow z = 2x$$

Si llamamos $x = t$, resulta:

$$(x, y, z) = (t, -t, 2t) = t(1, -1, 2)$$

Observamos que todos los vectores de la recta pueden expresarse como combinación lineal del vector director $(1, -1, 2)$, que además es LI. Por lo tanto, $\{(1, -1, 2)\}$ es una base de este subespacio.

Las rectas que pasan por el origen son subespacios de dimensión 1.

En los ejemplos anteriores observamos cómo disminuye la dimensión de un subespacio a medida que agregamos ecuaciones, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

$$V = \mathbb{R}^3$$

Número mínimo de ecuaciones que definen S	Dimensión del subespacio	Objeto geométrico	Ejemplo
0	3	\mathbb{R}^3	
1	2	Planos por el origen	$z = 0$
2	1	Rectas por el origen	$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
3	0	$\{(0,0,0)\}$	$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

EPL 1

Indicar si $A = \{(1,1,1), (1,3,2)\}$ es una base de $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$, justificando la respuesta.

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente subespacio de \mathbb{R}^4 y busquemos base y dimensión:

$$T_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0 \wedge x_2 - x_4 = 0\}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones que definen T_1 , ¿podrían anticipar su dimensión?

Observación: Como x_3 no aparece en las ecuaciones que definen el subespacio, un error frecuente es suponer $x_3 = 0$.

Si x_3 no está en las ecuaciones, significa que es una *variable libre*, o sea que puede tomar cualquier valor real.

Entonces:

$$T_1: \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases} \quad \forall x_3, \forall x_4$$

Escribimos el vector genérico (representativo) del subespacio que debe quedar expresado en función de las variables libres x_3 y x_4 :

$$(-x_4, x_4, x_3, x_4) = x_3(0,0,1,0) + x_4(-1,1,0,1)$$

Encontramos dos vectores L.I. que generan el subespacio. Entonces una base de T_1 es:

$$B_{T_1} = \{(0,0,1,0), (-1,1,0,1)\} \quad \text{por lo tanto} \quad \dim(T_1) = 2$$

Ejemplo 2

Hallemos una base y la dimensión del subespacio de matrices simétricas de 2×2 :

$$T_2 = \{A \in R^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$$

¿Cómo es una matriz simétrica de 2×2 ? $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres matrices halladas son L.I. y generan el subespacio de matrices simétricas, por lo tanto hemos encontrado una base de dicho subespacio:

$$B_{T_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(T_2) = 3$$

EPL 2

Hallar una base y la dimensión del subespacio de matrices antisimétricas de 2×2 y de 3×3 .

Ejemplo 3

Hallar base y dimensión de $S = \{p(x) \in P_2 \mid a_0 - 2a_1 + 3a_2 = 0\}$

Resolución

¿Cómo es un polinomio de P_2 ?

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

La dimensión de P_2 es 3, pero estamos agregando la condición $a_0 - 2a_1 + 3a_2 = 0$.

Podemos anticipar que la dimensión del subespacio es 2, para comprobarlo busquemos una base:

$$a_0 - 2a_1 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 2a_1 - 3a_2$$

$$p(x) = (2a_1 - 3a_2) + a_1x + a_2x^2$$

$$p(x) = a_1 \underbrace{(2+x)}_{p_1(x)} + a_2 \underbrace{(-3+x^2)}_{p_2(x)}$$

Estos dos vectores generan S , y además vemos que son LI.

Entonces encontramos una base del subespacio:

$$B_S = \{2 + x, -3 + x^2\}$$

$$\dim(S) = 2$$

Bases de subespacios definidos por generadores

Hasta ahora hemos buscado bases de subespacios definidos por ecuaciones.

¿Qué ocurre cuando el subespacio está definido por sus generadores?

Veamos el siguiente ejemplo:

Hallar una base y la dimensión de $S = \text{gen}\{(1,1,2), (1,-1,0), (0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

En este caso, por la definición de S sabemos que $\{(1,1,2), (1,-1,0), (0,1,1)\}$ es un conjunto generador de S . Para determinar si es una base, tendremos que analizar la independencia lineal:

- Si son vectores LI, entonces son base del subespacio.
- Si son LD, tendremos que extraer una base eliminando los vectores "que sobren".

En el caso específico de 3 vectores en \mathbb{R}^3 , podemos utilizar el determinante (que es el producto mixto). Como en este caso el determinante da cero, los vectores son coplanares y por lo tanto L.D. Tenemos que extraer una base eliminando alguno de los vectores, por ejemplo:

- $\{(1,1,2), (1,-1,0)\}$ es una base de S
- $\{(1,-1,0), (0,1,1)\}$ es otra base de S .

Podemos afirmar que la dimensión de S es 2.

Una forma práctica de extraer bases es armar una matriz con los vectores dados y llevarla a la *forma escalonada*:

Una matriz es *escalonada (por filas)* si satisface las siguientes propiedades:

1. Las filas nulas (todos sus elementos son ceros) se encuentran en la parte inferior.
2. En cada fila no nula, el primer elemento distinto de cero (pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior.

Una matriz cualquiera puede llevarse a la forma escalonada aplicando operaciones elementales entre sus filas. Por ejemplo consideremos la matriz que armamos con los generadores de S :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se denomina **rango** de una matriz al número de filas LI que tiene la matriz.

Veremos en la siguiente unidad la importancia de este concepto en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales.

Puede demostrarse que:

1. Si se realizan operaciones elementales entre las filas de una matriz, el rango se conserva.
2. Las filas no nulas de una matriz escalonada son LI.

Por lo tanto, para determinar el rango de una matriz se aplican operaciones elementales para obtener una matriz escalonada y se cuentan las filas no nulas.

En el ejemplo, la matriz escalonada tiene rango 2, por lo tanto la matriz que armamos con los generadores de S tiene rango 2. Esto significa que de los tres generadores de S hay dos linealmente independientes. ¿Cuál es entonces la dimensión de S ? $\dim(S) = 2$

Este método también permite obtener bases: las filas no nulas de la última matriz son otra base de S , ya que fueron obtenidas como combinaciones lineales de los vectores de S :

$$\{(1,1,2), (0,2,2)\} \text{ otra base de } S$$

Ejemplo

Dado el conjunto:

$$A = \{1 + x; 1 - x^2; 2 + 3x + kx^2\} \subset P_2$$

Hallar todos los valores de k par que A genere un subespacio de dimensión 2

Para el k hallado encontrar las ecuaciones del subespacio generado por A .

Resolución

Sabemos que $\dim(P_2) = 3$, entonces todo conjunto de 3 vectores LI en P_2 es base de P_2 . Como se pide que la dimensión del subespacio sea 2, debemos hallar k de modo que los vectores sean LD.

Los dos primeros vectores de A son LI, entonces se trata de analizar para qué valores de k el tercer vector es combinación lineal de los anteriores:

$$2 + 3x + kx^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x^2)$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 3 = \alpha \\ k = -\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -1, \quad k = 1$$

Para $k = 1$, el polinomio $2 + 3x + kx^2$ es combinación lineal de $1 + x$ y $1 - x^2$.

Entonces:

$$\text{gen}\{1 + x; 1 - x^2; 2 + 3x + x^2\} = \text{gen}\{1 + x; 1 - x^2\}$$

$$\{1 + x; 1 - x^2\} \text{ es base de } P_2$$

Ahora busquemos la ecuación del subespacio. Tomamos un polinomio genérico, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y lo escribimos como combinación lineal de los vectores de la base:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x^2)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_0 \\ -\beta = a_2 \\ \alpha = a_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = a_1 \wedge \beta = -a_2 \Rightarrow a_0 = a_1 - a_2$$

Entonces ésa es la ecuación que define al subespacio:

$$S = \text{gen}(A) = \{p \in P_2 \mid a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$$

Como verificación, puede comprobarse que los dos vectores de la base verifican la ecuación obtenida.

Operaciones con subespacios

Intersección

Sean S y T subespacios del mismo espacio vectorial V . Definimos la intersección como sigue:

$$S \cap T = \{v \in V : v \in S \wedge v \in T\} \quad \text{intersección de subespacios}$$

Propiedad: $S \cap T$ es subespacio de V .

Demostración:

$$1. 0_V \in S \wedge 0_V \in T \Rightarrow 0_V \in S \cap T$$

$$2. \text{Consideremos } u, v \in S \cap T$$

$$\Rightarrow u \in S \wedge u \in T \wedge v \in S \wedge v \in T$$

$$u \in S \wedge v \in S \Rightarrow u + v \in S \quad [1]$$

$$u \in T \wedge v \in T \Rightarrow u + v \in T \quad [2]$$

De [1] y [2] se deduce que $u + v \in S \cap T$

$$3. \text{Dejamos a cargo del lector demostrar: } u \in S \cap T \Rightarrow (ku) \in S \cap T$$

Ejemplo 1

Sean los subespacios de \mathbb{R}^3 :

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 3z = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$

Hallar $S \cap T$.

Resolución

Por definición $S \cap T$ es un conjunto que estará formado por los vectores que pertenezcan a S y a T . Es decir aquellos vectores que satisfagan las ecuaciones de S y las de T :

$$S \cap T = \{(x, y, z) \mid x - 3z = 0 \wedge x + y - z = 0\}$$

Se trata de una recta definida como intersección de dos planos. Una base de la recta es un vector director.

Geoméricamente podemos buscar el vector director como el producto vectorial de los vectores normales a los planos:

$$v = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, -2, 1)$$

$$S \cap T = \{(x, y, z) = \lambda(3, -2, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Entonces $\{(3, -2, 1)\}$ es una base de $S \cap T$.

Otra forma de resolverlo es buscar la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = z - x = -2z \end{cases} \Rightarrow (3z, -2z, z) \forall z \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = z(3, -2, 1)$$

Y entonces otra vez llegamos a que $\{(3, -2, 1)\}$ es una base de $S \cap T$.

Ejemplo 2

Sean los subespacios de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$$

$$T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar $S \cap T$.

Resolución

La intersección de subespacios está formada por los vectores que verifican las ecuaciones de dichos subespacios.

¿Qué tiene que cumplir una matriz para pertenecer a S ?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid c = b \right\}$$

¿Qué tiene que cumplir una matriz para pertenecer a T ?

Tiene que poder escribirse como combinación lineal de: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hallemos las ecuaciones del subespacio T :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 2\alpha + \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = 0 \\ c = 2\alpha + \beta \\ d = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = a + d \\ b = 0 \\ \beta = c + 2d \\ \alpha = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d = c + 2d \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = 0 \wedge a - c - d = 0 \right\}$$

Ahora planteamos que las matrices de $S \cap T$ deben cumplir con las ecuaciones de S y las de T :

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid b = c \wedge b = 0 \wedge a - c - d = 0 \right\}$$

O sea:

$$b = c = 0 \wedge a = d$$

Entonces las matrices de $S \cap T$ son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y una base de $S \cap T$ es:

$$B_{S \cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hay un método alternativo más breve para hallar una base de $S \cap T$ sin necesidad de obtener las ecuaciones de T , como veremos a continuación.

Escribamos una matriz de T como combinación lineal de los vectores que la generan:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = 0 \\ c = 2\alpha + \beta \\ d = -\alpha \end{cases}$$

Pero además deben cumplirse las ecuaciones de S que establecen que $c = b$.
Entonces:

$$2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -\alpha \end{cases}$$

Por lo tanto, una matriz de S n T es:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{S \cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Suma de subespacios

Dados S, T subespacios de V , se define la suma como sigue:

$$S + T = \{v \in V : v = v_1 + v_2, \text{ con } v_1 \in S, v_2 \in T\} \quad \text{suma de subespacios}$$

Propiedad: $S + T$ es un subespacio del espacio vectorial V .

Dejamos la demostración a cargo del lector.

Si conocemos conjuntos generadores de S y de T , podemos hallar generadores de la suma:

$$S = \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_q\} \quad \text{y} \quad T = \text{gen}\{w_1, w_2, \dots, w_r\} \Rightarrow S + T = \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_q, w_1, w_2, \dots, w_r\}$$

Para hallar la suma es usual buscar las bases de S y T . Como las bases son conjuntos generadores LI, si conocemos una base de cada subespacio podremos obtener un conjunto generador de la suma:

$$\text{Dadas las bases} \quad B_S = \{v_1, v_2, \dots, v_q\} \quad \text{y} \quad B_T = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$$

$$\text{Resulta:} \quad \{v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r\} \quad \text{conjunto generador de la suma}$$

Observación: Se obtiene así un conjunto generador de la suma pero no siempre es linealmente independiente.

- Si es LI, encontramos una base de la suma.
- Si es LD, podemos extraer una base de la suma eliminando los vectores "que sobran".

Ejemplo 1

Dados los siguientes subespacios de $V = \mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 3z = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$

Nos interesa hallar $S + T$.

Busquemos una base de S . Para eso en la ecuación despejamos una variable:

$$x = 3z$$

Ahora armamos un vector genérico:

$$(x, y, z) = (3z, y, z) = z(3, 0, 1) + y(0, 1, 0)$$

$$B_S = \{(3, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

Busquemos una base de T . Para esto en la ecuación despejamos una variable:

$$z = x + y$$

Ahora armamos un vector genérico:

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

Entonces

$$B_T = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

$$S + T = \text{gen}\{(3, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Sabemos que todo conjunto de más de 3 vectores en \mathbb{R}^3 es linealmente dependiente, ya que la dimensión de \mathbb{R}^3 es 3. ¿Cómo podemos extraer una base de la suma?

Podríamos armar una matriz con estos 4 vectores y llevarla a la forma escalonada. O si no, como el espacio es \mathbb{R}^3 podemos pensar geoméricamente:

$$S + T = \text{gen}\left\{\overbrace{(3, 0, 1), (0, 1, 0)}^{B_S}, \overbrace{(1, 0, 1), (0, 1, 1)}^{\notin S}\right\}$$

Como $(1, 0, 1)$ no verifica la ecuación del plano S , los 3 primeros vectores no son coplanares y por lo tanto forman una base de \mathbb{R}^3 . Podemos eliminar $(0, 1, 1)$ porque es combinación lineal de dicha base.

Por lo tanto: $B = \{(3, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ es base de $S + T$ y es base de \mathbb{R}^3 .

En este caso, como $S + T$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 3, podemos afirmar que:

$$S + T = \mathbb{R}^3$$

Generalizando:

$$S \text{ subespacio de } V \text{ y } \dim(S) = \dim(V) \Rightarrow S = V$$

Ejemplo 2

Dados los siguientes subespacios de $V = \mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_2 + x_4 = 0\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = x_3 + x_4 = 0\}$$

Hallar base y dimensión de $S_1 + S_2$.

Resolución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_2, x_3, -x_2) = x_2(-1, 1, 0, -1) + x_3(0, 0, 1, 0)$$

$$B_{S_1} = \{(1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_2, -x_4, x_4) = x_4(1, 0, -1, 1) + x_2(0, 1, 0, 0)$$

$$B_{S_2} = \{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$$

$$S_1 + S_2 = \text{gen}\{(1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$$

Cómo hemos visto, un método para analizar si son LI o LD, consiste en armar una matriz con los vectores como filas y llevarla a su forma escalonada. Por conveniencia colocaremos los vectores en el siguiente orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada tiene 3 filas LI (su rango es 3), entonces podemos afirmar que la dimensión de $S + T$ es 3.

Como se anuló la última fila, el vector $(0, 0, 1, 0)$ es combinación lineal de los otros tres, por lo tanto una base de $S + T$ es: $B_{S+T} = \{(1, -1, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 1)\}$.

Recordemos que las filas de la matriz escalonada componen otra base de la suma:

$$B'_{S+T} = \{(1, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

Suma directa

La suma de dos subespacios es directa si y sólo si la intersección de los subespacios es el vector nulo.

$$S + T \text{ es directa} \Leftrightarrow S \cap T = \{0_V\}$$

Cuando la suma es directa se escribe:

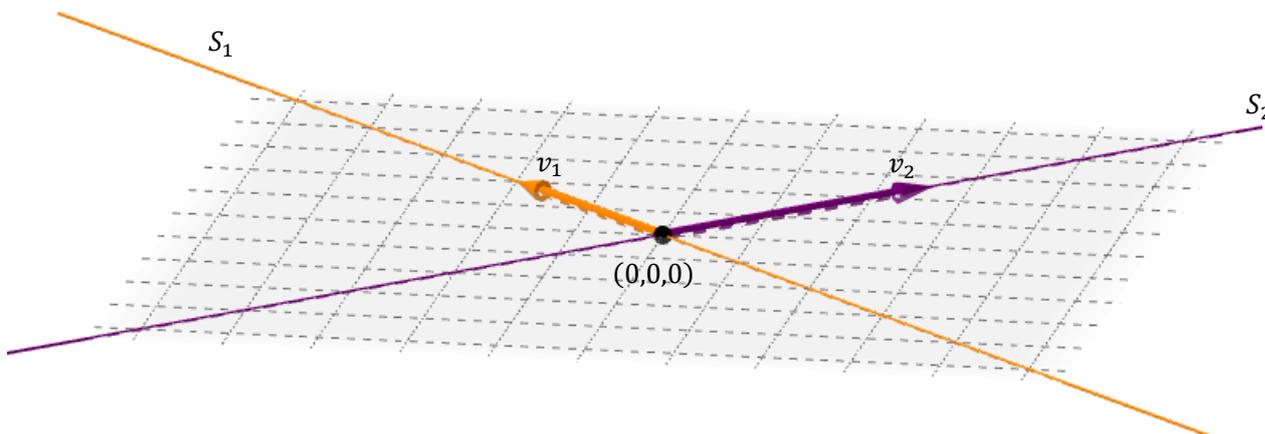
$$S \oplus T$$

Ejemplos en $V = \mathbb{R}^3$

A continuación consideraremos diferentes casos de suma de subespacios en \mathbb{R}^3 .

Dos rectas

Un caso posible de suma de dos subespacios en \mathbb{R}^3 es el de dos rectas que se cortan:



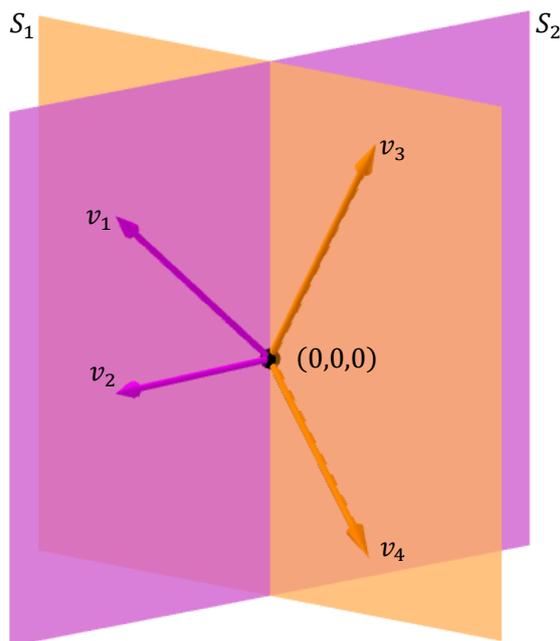
Los dos vectores LI de las rectas generan un plano: aquél que contiene a ambas rectas. La suma es directa porque la intersección entre las rectas es el vector nulo.

$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\} \text{ y } S_1 + S_2 = \text{gen}\{v_1, v_2\}$$

$$S_1 \oplus S_2 = S \text{ donde } S \text{ es el plano que contiene a las dos rectas}$$

Dos planos que se cortan

Otro caso posible de suma de dos subespacios en \mathbb{R}^3 es el de dos planos que se cortan en una recta:



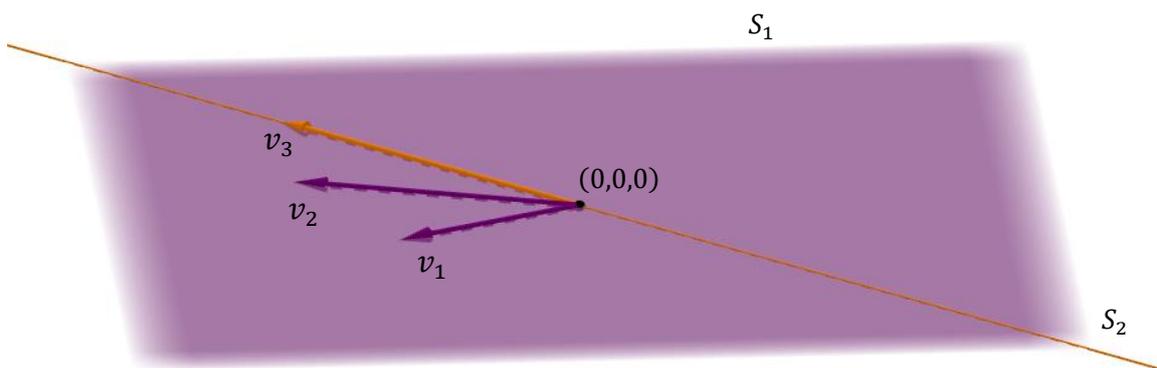
$$S_1 \cap S_2 \neq \{0_V\} \text{ y } S_1 + S_2 = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$$

La suma de los subespacios es \mathbb{R}^3 pero no es suma directa porque la intersección no es el vector nulo:

$$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$$

Un plano y una recta incluida en el plano

Otro caso posible de suma de dos subespacios en \mathbb{R}^3 es el de un plano y una recta incluida en el plano.

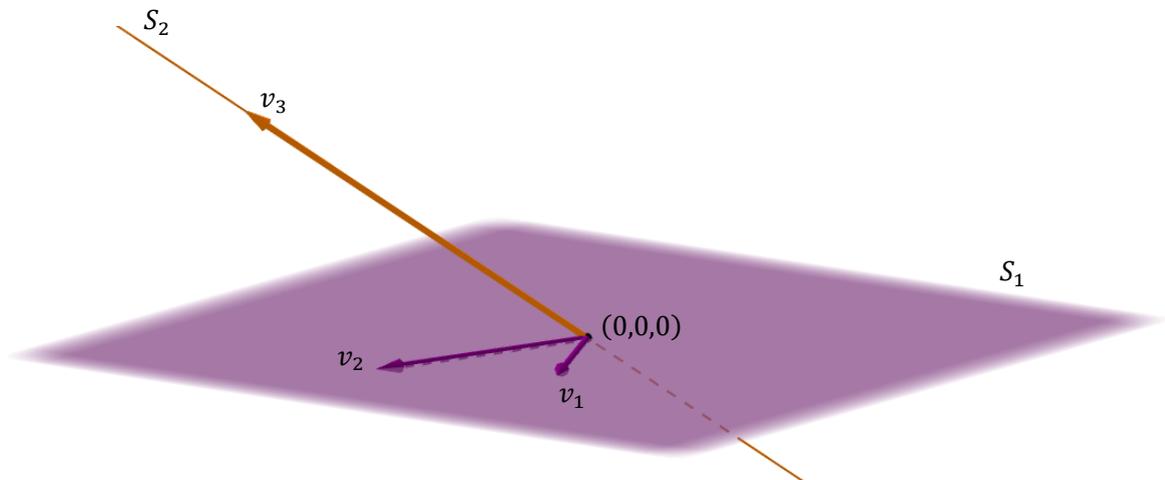


$$S_1 + S_2 = S_1 \text{ pues } S_2 \subset S_1$$

Se obtiene el mismo plano, y la suma no es directa porque la intersección no es igual al vector nulo.

Un plano y una recta no incluida en el plano

Otro caso posible de suma de dos subespacios en \mathbb{R}^3 es el de un plano y una recta no incluida en el plano.



$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\} \quad \text{y} \quad S_1 + S_2 = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$$

Se genera \mathbb{R}^3 porque el vector director de la recta no es coplanar con los vectores del plano, y además es directa porque la intersección es el vector nulo:

$$\boxed{S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3}$$

Observación: En el último caso, la unión de las bases de los dos subespacios forma una base de todo el espacio. En este caso, cada vector de \mathbb{R}^3 puede expresarse de forma única como suma de un vector de S_1 y otro de S_2 .

EPL 3

Dados $S_1 = \text{gen}\{(1,2,1), (0,2,0)\}$ y $S_2 = \{(x,y,z): x + y = y - kz = 0\}$,

a) Hallar los valores de k para los cuales $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$;

b) Para $k = 0$, comprobar que $v = (3,2,1)$ puede expresarse de forma única como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y otro de $v_2 \in S_2$.

EPL 4

Sean los subespacios de \mathbb{R}^4 :

$S = \text{gen}\{(1,1,1,1), (0,1,0,1)\}$ y $T = \{(x,y,z,t): x - z = 0, x - z + t = 0\}$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? Justificar.

1. $S \oplus T = \mathbb{R}^4$
2. $S + T = \mathbb{R}^4$

$$3. S + T = W \text{ y } \dim(W) = 3$$

$$4. S \oplus T = W \text{ y } \dim(W) = 3$$

Teorema de la dimensión de la suma

Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V (de dimensión finita), entonces:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

En el caso particular de que la suma sea directa, como $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$, resulta:

$$\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$$

Ejemplo

Dados los subespacios de P_2 :

$$S_1 = \{p \in P_2 \mid p(0) = 0\}$$

$$S_2 = \{p \in P_2 \mid p(1) = 0\}$$

Hallar bases de ambos subespacios y de la intersección

Resolución

Hallemos una base de S_1 :

$$p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Entonces son los polinomios de la forma:

$$a_1 x + a_2 x^2$$

Luego una base de S_1 es:

$$B_{S_1} = \{x, x^2\} \Rightarrow \dim(S_1) = 2$$

Hallemos una base de S_2 :

$$p(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

Entonces son los polinomios de la forma:

$$(-a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2 = a_1(-1 + x) + a_2(-1 + x^2)$$

$$B_{S_2} = \{-1 + x, -1 + x^2\} \Rightarrow \dim(S_2) = 2$$

Para buscar $S_1 \cap S_2$ debemos plantear que se cumplan las ecuaciones de S_1 y también las de S_2 :

$$a_0 = 0 \wedge a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \wedge a_1 = -a_2$$

Los polinomios serán de la forma:

$$a_1x - a_1x^2 = a_1(x^2 - x)$$

Luego:

$$B_{S_1 \cap S_2} = \{x^2 - x\} \Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) = 1$$

Nótese que como conocemos las dimensiones de S_1 , S_2 y $S_1 \cap S_2$, podemos calcular la dimensión de $S_1 + S_2$:

$$\dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Pero el único subespacio de P_2 con dimensión 3 es P_2 . Luego: $S_1 + S_2 = P_2$.

EPL 5

Dados los subespacios de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$W_1: \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$$

$$W_2: \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = -A^t\}$$

- Hallar bases de W_1 y W_2
- Obtener $W_1 \cap W_2$.
- Sin hallar $W_1 + W_2$ analizar la validez de la siguiente afirmación:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

- Proponer una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ formada por matrices simétricas y antisimétricas, y expresar la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

como suma de una matriz simétrica más una antisimétrica.

Producto interno

En la primera unidad vimos producto escalar entre vectores y sus aplicaciones a la Geometría. En esta sección nos proponemos generalizar esta operación a otros espacios vectoriales definiendo la noción general de producto interno a partir de las propiedades del producto escalar.

Definición: Un **producto interno** en un espacio vectorial real V es una operación que asigna a cada par de vectores u y v de V un número real $u \cdot v$ tal que se verifican las siguientes propiedades (para todo vector u, v, w de V y todo escalar α):

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$
- $\alpha u \cdot v = \alpha(u \cdot v)$

$$4. u \cdot u \geq 0 \quad y \quad u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$$

Es posible definir así distintos productos internos en cualquier espacio vectorial (mientras se verifiquen estas propiedades). En nuestra materia, sólo trabajaremos con el *producto interno canónico* en \mathbb{R}^n , que es la extensión del producto escalar:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad \text{producto interno canónico en } \mathbb{R}^n$$

Esta definición nos permite extender el concepto de *ortogonalidad* a \mathbb{R}^n :

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \quad \text{condición de ortogonalidad}$$

Ejemplo

Realicemos el producto interno de los vectores de \mathbb{R}^4 :

$$u = (1, 2, 3, 4) \quad v = (1, 0, 1, -1)$$

$$u \cdot v = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 0$$

Como $u \cdot v = 0$ entonces u y v son ortogonales.

Complemento ortogonal de un subespacio

Sea S subespacio de V (espacio vectorial con producto interno).

El *complemento ortogonal* de S , que denotamos como S^\perp , es el conjunto de vectores de V que son ortogonales a cada uno de los vectores de S :

$$S^\perp = \{ v \in V : v \cdot w = 0 \quad \forall w \in S \} \quad \text{complemento ortogonal de } S$$

Propiedad: S^\perp es un subespacio de V .

- 0_V pertenece a S^\perp pues $0_V \cdot w = 0$ para todo w de S
- Sean $u, v \in S^\perp \Rightarrow u \cdot w = 0 \wedge v \cdot w = 0 \quad \forall w \in S \Rightarrow (u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w = 0$

Por lo tanto $u + v$ está en S^\perp

- Si $u \in S^\perp \Rightarrow ku \in S^\perp$. ¿Por qué?

Ejemplo 1

Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Hallar S^\perp .

Resolución

Tenemos que buscar los vectores de \mathbb{R}^3 que sean perpendiculares a todos los vectores de ese plano.

Primero buscamos una base de S , por ejemplo:

$$B_S = \{(-1,1,1), (0,1,3)\}$$

Para hallar el complemento ortogonal, buscamos todos los vectores (x, y, z) que sean ortogonales a $(-1,1,1)$ y a $(0,1,3)$.

Se obtiene así un sistema de ecuaciones que define el complemento ortogonal:

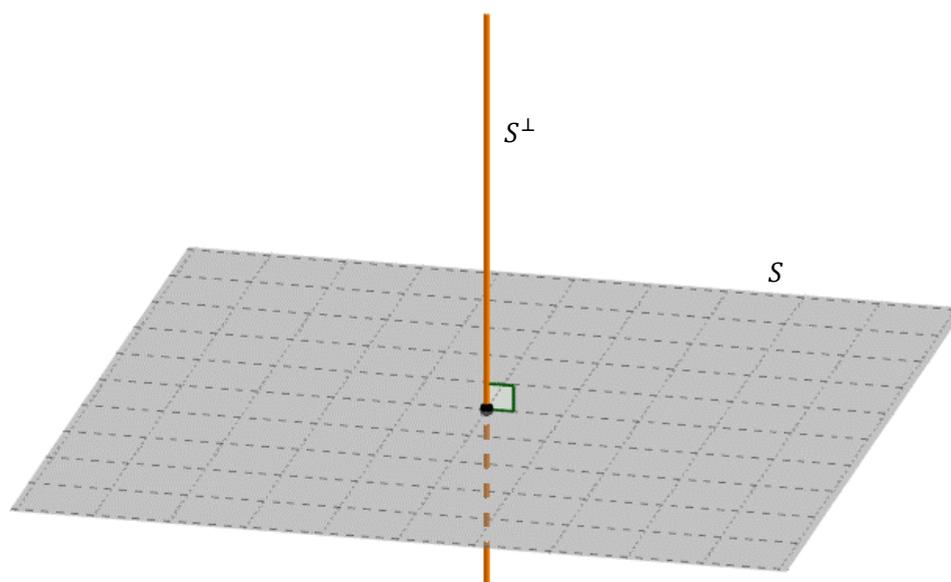
$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 3z + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \end{cases} \quad \text{Ecuaciones de } S^\perp$$

¿Cuál es una base del subespacio S^\perp ?

$$B_{S^\perp} = \{(-2, -3, 1)\}$$

La base es un vector perpendicular al plano S . Por lo tanto, el complemento ortogonal de un plano que pasa por el origen es la recta perpendicular que pasa por el origen.



Si S es una recta que pasa por el origen: ¿cuál es su complemento ortogonal?

EPL 6

Para justificar el procedimiento que utilizamos para encontrar las ecuaciones de S^\perp , les pedimos que demuestren la siguiente propiedad:

Sean u, v, w vectores de \mathbb{R}^n .

Si w es ortogonal a u y a v , entonces es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v .

Ejemplo 2

Dado siguiente subespacio de \mathbb{R}^4 :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \wedge x_2 - x_4 = 0\}$$

Halle base y dimensión del complemento ortogonal.

Resolución

Tenemos que buscar los vectores de \mathbb{R}^4 que son ortogonales a los vectores de S .

Hallemos una base de S :

$$\begin{aligned} (-x_2 + 3x_3, x_2, x_3, x_2) &= x_2(-1, 1, 0, 1) + x_3(3, 0, 1, 0) \\ \Rightarrow B_S &= \{(-1, 1, 0, 1), (3, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Ahora buscamos los (x_1, x_2, x_3, x_4) tales que:

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4)(3, 0, 1, 0) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4)(-1, 1, 0, 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Hallamos las ecuaciones que definen a S^\perp :

$$S^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + x_3 = 0 \wedge -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

Busquemos una base de S^\perp :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, -3x_1, x_1 - x_2) &= x_1(1, 0, -3, 1) + x_2(0, 1, 0, -1) \\ \Rightarrow B_{S^\perp} &= \{(1, 0, -3, 1), (0, 1, 0, -1)\} \Rightarrow \dim(S^\perp) = 2 \end{aligned}$$

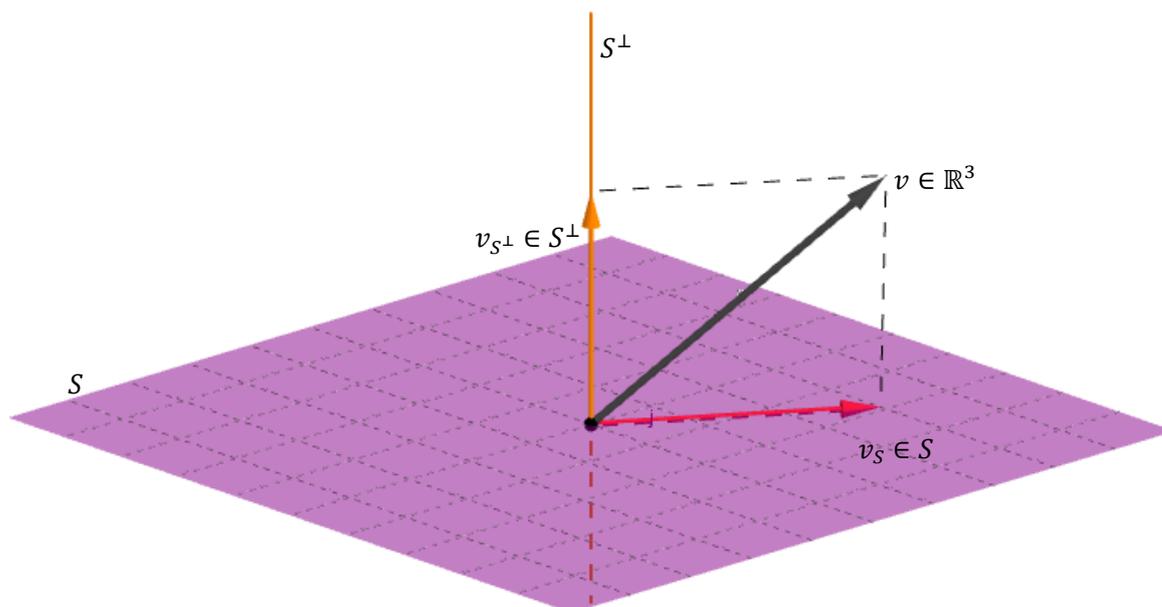
Propiedades del complemento ortogonal

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno, y sea S un subespacio de V . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $(S^\perp)^\perp = S$
2. $V^\perp = \{0_V\}$ y $\{0_V\}^\perp = V$
3. $S \cap S^\perp = \{0_V\}$
4. $S + S^\perp = V$

Esta última propiedad significa que cualquier vector de V puede expresarse como suma de un vector de S más otro de S^\perp .

Ilustramos con un ejemplo geométrico de \mathbb{R}^3 :



De las propiedades 3 y 4 se deduce:

$$S \oplus S^\perp = V$$

Y por lo tanto:

$$\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(V)$$

La unión de una base de S con una base de S^\perp es base de V . Esto se aplica para extender una base de S a una base de V , como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_4 = 0\}$.

Hallar una base de S y extenderla a una base de \mathbb{R}^4 .

Resolución

Buscamos una base de S , por ejemplo:

$$B_S = \{(1, -2, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$$

Como $\dim(S) = 2$, podemos anticipar que: $\dim(S^\perp) = 4 - 2 = 2$

A partir de la base de S , obtenemos las ecuaciones de S^\perp :

$$S^\perp: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Y hallamos una base de S^\perp , por ejemplo:

$$B_{S^\perp} = \{(2, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -2)\}$$

Entonces uniendo las bases de S y S^\perp resulta:

$$B = \{ (1, -2, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0), ((0, 1, 0, -2)) \} \text{ base de } \mathbb{R}^4$$

EPL 7

Dados los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 0, x_2 + 2x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad W = \text{gen}\{(1, 0, 0, 0), (2, 3, k, 0)\}$$

Hallar los valores de k para los cuales $W = S^\perp$