ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 4

SISTEMAS DE ECUACIONES

UTN.BA

Isabel Pustilnik
Federico Gómez

ÍNDICE

Rango y sistemas de ecuaciones lineales

Espacio fila y espacio columna de una matriz

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cada fila de A es un vector de $\mathbb{R}^4$:

$$F_1 = (1 , 1, 0 , 1)$$

$$F_2 = (0 \ , \ 0 , 1 \ , -1)$$

$$F_3 = (1 , 1 , -1 , 2)$$

Y cada columna es un vector de $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^{3x1}$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se denomina *espacio fila* al subespacio generado por las filas:

$$Fil(A) = gen\{F_1, F_2, F_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Se denomina *espacio columna* al subespacio generado por las columnas:

$$Col(A) = gen\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

En general, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de m filas con n columnas, los espacios fila y columna son:

$$Fil(A) = gen\{F_1, F_2, \dots , F_m\} \ \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$Col(A) = gen\{A_1, A_2, \dots , A_n\} \ \subseteq \mathbb{R}^m$$

Rango de una matriz

$Fil(A)$ y $Col(A)$ son en general subespacios de diferentes espacios vectoriales. Pero se puede demostrar que en cualquier matriz la dimensión del espacio fila coincide con la dimensión del espacio columna, y a ese número se lo llama *rango de la matriz* A.

$$\boldsymbol{dim\big(Fil(A)\big) = dim\big(Col(A)\big) = rg(A)}$$

El rango es el número de filas (o columnas) LI que tiene la matriz A.

Propiedad

Como consecuencia de esta definición puede afirmarse que

$$rg(A) = rg(A^t)$$

Método para hallar el rango de una matriz

Recordemos que:

1. Si se realizan operaciones elementales entre las filas de una matriz, el rango se conserva.

2. Las filas no nulas de una matriz escalonada son LI.

Por lo tanto, para determinar el rango de una matriz se aplican operaciones elementales para obtener una matriz escalonada y se cuentan las filas no nulas.

Ejemplo 1

Una matriz escalonada por filas es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar el rango contamos el número de filas no nulas (número de pivotes):

$$rg(M) = 2$$

Ejemplo 2

Consideremos la matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Como es escalonada por filas, contamos la cantidad de filas no nulas para hallar el rango:

$$rg(N) = 3$$

Se puede confundir una matriz escalonada con una matriz triangular, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observamos que A es triangular (los elementos debajo de la diagonal principal son ceros) pero no está escalonada.

Mediante la operación elemental $F_3 \to F_3 - 2F_2$, obtenemos una matriz escalonada equivalente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se deduce que $rg(A) = rg(B) = 2$

Ejemplo 4

Retomemos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 2$$

Entonces una base del espacio fila es:

$$B_{Fil(A)} = \{F_1, F_2\}$$

Como la dimensión del espacio columna es la misma que la dimensión del espacio fila, sabemos que A tiene dos columnas LI. Por lo tanto una base de $Col(A)$ es:

$$B_{Col(A)} = \{A_1, A_3\}$$

Compatibilidad y rango

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones con 4 incógnitas (3 x 4) cuya matriz de coeficientes es la A del ejemplo anterior.

El sistema puede expresarse en forma matricial como: $A\,X = B$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Este sistema, ¿tendrá solución? ¿Cuántas soluciones tendrá?

Veamos cómo escribir el sistema en función de las columnas de la matriz A:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

Queda una combinación lineal de las columnas de A igualada al vector de los términos independientes:

$$x_1\,A_1+x_2\,A_2+x_3\,A_3+x_4\,A_4=B$$

¿Cuándo tiene solución el sistema? Cuando podemos encontrar valores para x_1, x_2, x_3, x_4 que satisfagan la igualdad. Estos valores pueden ser únicos o no.

En otras palabras:

El sistema $AX = B$ es compatible si y sólo si B es combinación lineal de las columnas de A.

Decir que B es combinación lineal de las columnas de A significa que B está en el subespacio generado por las columnas de A. O sea:

$$\boldsymbol{El\ sistema\ \ AX=B\ \ es\ compatible}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{B\in Col(A)}$$

Consideremos la matriz ampliada del sistema, que se obtiene agregando la columna de los términos independientes:

$$A'=(A_1\quad A_2\quad A_3\quad A_4\quad B)$$

¿Qué valores puede tomar $rg(A')$?

El rango de A' dependerá de si B es combinación lineal o no de las columnas de A:

- $rg(A')=rg(A)=2\Leftrightarrow B\in Col(A)$
- $rg(A')=rg(A)+1=3\Leftrightarrow B\notin Col(A)$

Estamos en condiciones de enunciar un teorema central sobre la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ es compatible si y sólo si el rango de la matriz ampliada es igual al rango de A.

$$\boldsymbol{El\ sistema\ \ AX=B\ es\ compatible\Leftrightarrow rg(A)=rg(A')}$$

Ejemplo 1

Retomemos el sistema de ecuaciones anterior para analizar su compatibilidad:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=3\\ x_3-x_4=2\\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&\mathbf{3}\\0&0&1&-1&\mathbf{2}\\1&1&-1&2&\mathbf{0}\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}1&1&0&1&\mathbf{3}\\0&0&1&-1&\mathbf{2}\\0&0&-1&1&\mathbf{-3}\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3+F_2]{}\begin{pmatrix}1&1&0&1&\mathbf{3}\\0&0&1&-1&\mathbf{2}\\0&0&0&0&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$rg(A)=2\quad \text{y}\quad rg(A')=3\Rightarrow \text{El sistema es incompatible}$$

Ejemplo 2

Si cambiamos el término independiente de la tercera ecuación como sigue:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

El sistema resulta compatible porque:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = rg(A') = 2 \Rightarrow \text{El sistema es compatible}$$

De acuerdo con la matriz escalonada el sistema se expresa cómo sigue:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 + x_4 \\ x_1 = 3 - x_4 - x_2 \end{cases} \quad \forall x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

x_2, x_4 son las variables libres.

El conjunto solución es:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - x_4 - x_2, x_2, 2 + x_4, x_4) \ \ , \ \text{con} \ \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Observación sobre la notación: Si expresamos el sistema de ecuaciones como $AX = B$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el conjunto solución está incluido en $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y deberíamos escribirlo en forma de columna. En este caso deberíamos escribir:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_4 - x_2 \\ x_2 \\ 2 + x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{con} \ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Pero por motivos de simplicidad en la escritura muchas veces utilizaremos la notación de filas en lugar de la de columnas.

Espacio solución de un sistema homogéneo

Consideremos un *sistema homogéneo* $AX = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$.

Sea $S_h = \{ X \in \mathbb{R}^{nx1} : AX = 0 \}$, el conjunto solución del sistema.

1) $X = 0$ pertenece a S_h (solución trivial del sistema).

2) Sean X_1 y X_2 soluciones del sistema.

$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2$ también es solución

3) Sea X una solución, y k un número real.

$A(kX) = k(AX) = k0 = 0 \implies kX$ también es solución

Por lo tanto:

El conjunto solución de un sistema homogéneo $AX = 0$ (con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$) es un subespacio de $\mathbb{R}^{nx1}$.

Si el sistema (homogéneo) es compatible determinado, la única solución es la trivial. En ese caso, $dim(S_h) = 0$

¿De qué dependerá la dimensión de S_h para una matriz A dada?

EPL 1

Dado el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & k \end{pmatrix}$$

a) Determinar la dimensión del espacio solución y el rango de A de acuerdo con los valores de k.

b) Para $k = 0$ hallar una base del espacio solución.

Propiedad

Sea S_h el espacio solución del sistema homogéneo $AX = 0$, con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Puede demostrarse que:

$$\boldsymbol{dim(S_h) = n - rg(A)}$$

Les pedimos que comprueben esta propiedad en el ejercicio resuelto previamente.

Nota: El conjunto solución de un sistema homogéneo $AX = 0$ se denomina *espacio nulo* de la matriz A.

Relación entre las soluciones de $AX = B$ y $AX = 0$

Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones:

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + z = \mathbf{4} \\ -x + 2y - z = \mathbf{3} \end{cases}$$

Sistema homogéneo asociado:

$$\begin{cases} 2x - y + z = \mathbf{0} \\ -x + 2y - z = \mathbf{0} \end{cases}$$

Resolvemos primero el sistema de ecuaciones original:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + 4y - 2z - y + z = 4 \\ x = 2y - z - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -10 + 3y \\ x = -y + 7 \end{cases}$$

Luego el conjunto solución es:

$$(x, y, z) = (-y + 7,\ \ y\ , -10 + 3y) = y(-1,1,3) + (7,0,-10)$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ (x, y, z) = \lambda(-1,1,3) + (7,0,-10)\}$$

Geométricamente, el conjunto solución es una recta que no pasa por el origen.

Resolvamos ahora el sistema homogéneo asociado:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 2z - y + z = 0 \\ x = 2y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ x = -y \end{cases}$$

Luego el conjunto solución es:

$$(x, y, z) = (-y, y, 3y) = y(-1,1,3)$$

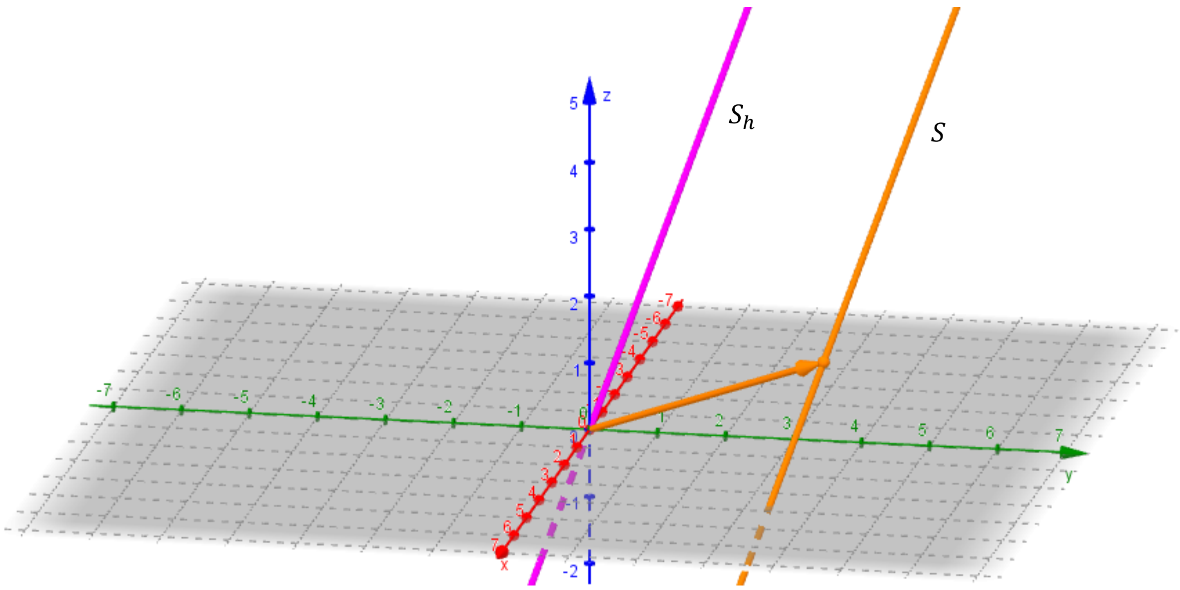
$$S_h = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = \lambda(-1,1,3)\}$$

Se trata de una recta paralela a la anterior, que pasa por el origen.

Notemos que tal como establecimos previamente, el conjunto solución de un sistema homogéneo es un subespacio.

¿Qué relación existe entre los conjuntos solución del sistema original y de su homogéneo asociado?

En la siguiente gráfica se muestran las soluciones de los sistemas. En naranja la recta solución del sistema no homogéneo, y en violeta la recta solución del sistema homogéneo:



Son dos rectas paralelas: la recta que es solución del sistema homogéneo pasa por el origen y la recta que es solución del sistema no homogéneo no pasa por el origen.

Observamos que:

$$S = \{(x, y, z) = \underbrace{\lambda(-1,1,3)}_{S_h} + \underbrace{(7,0,-10)}_{X_p}\}$$

$$\Rightarrow \ S = S_h + X_p$$

A continuación veremos un conjunto de propiedades que permiten generalizar este resultado para un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$:

Propiedad 1

La diferencia de dos soluciones particulares es solución del sistema homogéneo asociado.

Si X_1 y X_2 son dos soluciones particulares del sistema $AX = B$, entonces se cumple que:

$$AX_1 = B$$

$$AX_2 = B$$

Restando miembro a miembro:

$$AX_1 - AX_2 = 0$$

$$\Rightarrow \ A(X_1 - X_2) = 0$$

Por lo tanto $X_1 - X_2$ es solución de $AX = 0$

Propiedad 2

La suma de una solución particular de $AX = B$ y una solución del homogéneo asociado, es solución de $AX = B$.

Sean:

- X_p una solución particular de $AX = B$
- X_h una solución del sistema homogéneo asociado.

Queremos probar que $(X_p + X_h)$ es solución de $AX = B$

$$A(X_p + X_h) = AX_p + AX_h = B + 0 = B$$

Propiedad 3

En la propiedad anterior habíamos probado que $(X_p + X_h)$ es solución de $AX = B$. Recíprocamente:

Cualquier solución del sistema $AX = B$ puede expresarse como $X_p + X_h$, siendo X_p una solución particular del sistema y X_h una solución del homogéneo asociado.

Sea X una solución del sistema $AX = B$, entonces:

$$X = (X - X_p) + X_p$$

Por propiedad 1, $(X - X_p)$ es solución del homogéneo asociado, por lo tanto:

$$X = X_h + X_p$$

A partir de las propiedades 2 y 3 se deduce que:

El conjunto solución de un sistema $AX = B$ puede expresarse como suma de una solución particular y la solución del sistema homogéneo asociado.

$$\boldsymbol{S = X_p + S_h = \{X_p + X_h \ : \ X_h \in S_h\}}$$

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$$

Resolviendo resulta:

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 + y \\ x = 3 \end{cases}$$

El conjunto solución es:

$$(x, y, z) = (\ 3\ , y,\ \ 1 + y\ ) = (3,0,1) + y(0,1,1)$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ (x, y, z) = \lambda(0,1,1) + (3,0,1)\}$$

Según la propiedad vista anteriormente $S_h = \{\lambda(0,1,1)\}$ es solución del sistema homogéneo asociado y $X_p = (3,0,1)$ es una solución particular del sistema no homogéneo.

Ejemplo 2

Retomemos el sistema de ecuaciones que trabajamos en un ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Habíamos llegado al siguiente conjunto solución:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - x_4 - x_2, x_2, 2 + x_4, x_4) \ \ , \ \text{con} \ \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que el conjunto solución puede expresarse de la siguiente forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1,1,0,0) + x_4(-1,0,1,1) + (3,0,2,0)$$

Dejamos a cargo del lector comprobar que:

- $(3,0,2,0)$ es solución del sistema
- $(-1,1,0,0)$ y $(-1,0,1,1)$ son soluciones del *sistema homogéneo asociado* $AX = 0$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{x_2(-1,1,0,0) + x_4(-1,0,1,1)}_{S_h} + \underbrace{(3,0,2,0)}_{X_p}$$

$$S = S_h + X_p$$

Número de variables libres de un sistema

Recordemos que:

El sistema $AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow b \in Col(A) \Leftrightarrow rg(A) = rg(A')$

Supongamos que $B \in Col(A)$, es decir que el sistema es compatible, ¿Cuántas soluciones tiene?

Sea $rg(A) = rg(A') = r$

Si n es el número de incógnitas, puede demostrarse que:

- Si $r = n$, el sistema tiene solución única (SCD)
- Si $r < n$, el sistema admite infinitas soluciones (SCI), con $n - r$ variables libres

Observación: El número de variables libres es igual a la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo asociado.

Ejemplo

Analizar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, e indicar el número de variables libres.

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

Resolución

Ítem a

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

Realicemos el análisis a partir del rango de A y de A':

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 3 & \mathbf{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 3 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Como $rg(A) = rg(A') = n = 3$ entonces el sistema es SCD. No hay variables libres.

Ítem b

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ 2x+z=1 \end{cases}$$

Escalonamos A' para hallar $rg(A)$ y $rg(A')$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 0 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Al escalonar A' se elimina una de las filas. Luego:

$$rg(A) = rg(A') = 2 \quad \text{y} \quad n = 3 \Rightarrow \; SCI\ con\ una\ variable\ libre$$

Le proponemos al lector: hallar el conjunto solución, comprobar que el sistema es un SCI con una variable libre, e indicar una base de S_h.

Ítem c

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1+x_3+2x_4=1 \end{cases}$$

Escalonamos A' para hallar $rg(A)$ y $rg(A')$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = rg(A') = 2 \text{ y } n = 4 \;\Rightarrow\; SCI\ con\ dos\ variables\ libres.$$

Le proponemos al lector: hallar el conjunto solución, comprobar que el sistema es un SCI con dos variables libres, e indicar una base de S_h.

EPL 2

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=5 \\ x_1+x_2+3x_3-x_4=1 \\ x_2+x_3+hx_4=k \end{cases}$$

1) Analizar el rango de A (matriz de coeficientes) de acuerdo con el valor de h.

Indicar en cada caso cuál es la dimensión del sistema homogéneo asociado.

2) Para $h = -2$ obtener los valores de k para los cuales el sistema es compatible.

Resolver el sistema y expresar $S = X_p + S_h$.

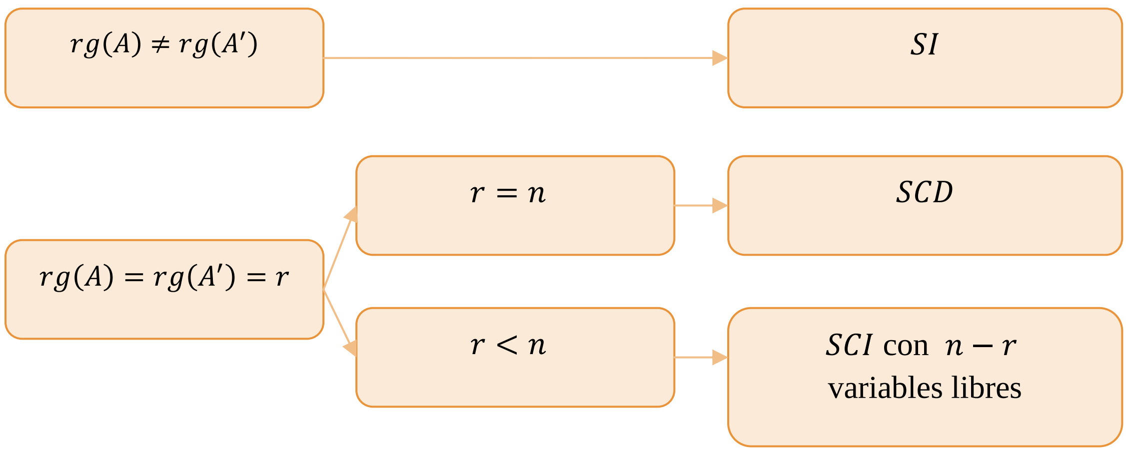
Obtener una base de S_h.

Resumen

Sea el sistema de ecuaciones $AX = B$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, cuya matriz ampliada es:

$$A' = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_n \quad B)$$

El siguiente esquema resume el análisis de compatibilidad que realizamos previamente:



En el caso particular de un sistema homogéneo $AX = 0$: