ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

UTN.BA

Isabel Pustilnik
Federico Gómez

ÍNDICE

Definición y propiedades de las transformaciones lineales 2
- **¿Qué son las transformaciones lineales?** 2
- **Propiedades de una transformación lineal** 2
  - Propiedad 1 2
  - Propiedad 2 2
  - Propiedad 3 2

Núcleo, imagen y teorema de las dimensiones 6
- **Núcleo de una transformación lineal** 6
- **Imagen de una transformación lineal** 6
- **Teorema de las dimensiones** 9
- **Los transformados de una base generan la imagen** 11
  - Ejemplo 1 12
  - Ejemplo 2 13

Clasificación de las transformaciones lineales 14
- **Propiedad** 16

Teorema fundamental de las transformaciones lineales 18
- **¿Qué se necesita para definir una transformación lineal?** 18
- **Teorema fundamental de las transformaciones lineales** 20

Matriz asociada a una transformación lineal 30
- **Ejemplos introductorios** 30
- **Construcción de la matriz asociada a una TL** 31
  - Propiedad 32
- **El rango es igual a la dimensión de la imagen** 38

Composición e inversa de transformaciones lineales 39
- **Composición de transformaciones lineales** 39
  - Matriz asociada a la composición de transformaciones lineales 41
- **Inversa de una transformación lineal** 41
  - Matriz de la transformación inversa 42

Matriz de cambio de base 44

Cómo afecta un cambio de base a la matriz asociada a una TL 47
- **Caso particular de $\mathbb{R}n$ a $\mathbb{R}n$** 48

Definición y propiedades de las transformaciones lineales

¿Qué son las transformaciones lineales?

En primer lugar, una transformación lineal es una función. Por ser función, tiene su dominio y su codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales. Tenemos dos espacios vectoriales V y W, y una función que va de V a W. O sea una regla de asignación que transforma vectores de V en vectores de W. Pero no toda función que transforme vectores de V en vectores de W es una transformación lineal. Debe cumplir ciertas condiciones:

$F: V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si:

1. $F(u+v) = F(u) + F(v)\ \ \forall u, v \in V$
2. $F(k.v) = k.F(v)\ \ \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

Propiedades de una transformación lineal

Propiedad 1

La imagen del vector nulo del dominio 0_V es el vector nulo del codominio 0_w:

$$T(0_V) = 0_w$$

Demostración:

$$T(0_V) = T(0.v) = 0.T(v) = 0.w = 0_W$$

Donde hemos expresado a 0_V como el producto del escalar 0 por cualquier vector del espacio vectorial V, hemos usado la segunda condición que debe cumplir una transformación lineal, y finalmente hemos vuelto a usar la propiedad de espacios vectoriales sobre el producto del escalar 0 por cualquier vector.

Propiedad 2

La imagen del vector $-v$ es igual al opuesto de la imagen de v:

$$T(-v) = -T(v)$$

Demostración:

$$T(-v) = T(-1.v) = -1.T(v) = -T(v)$$

La justificación de los pasos dados en la demostración es similar a la anterior.

Propiedad 3

Consideremos r vectores del espacio vectorial V:

$$v_1, v_2, \dots, v_r \in V$$

Tomemos una combinación lineal en el dominio:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_r v_r$$

Donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Si aplicamos la transformación lineal F de V a W, teniendo en cuenta las propiedades enunciadas en la definición, resulta:

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_r v_r) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \cdots + \alpha_r F(v_r)$$

Es decir que una transformación lineal "transporta" combinaciones lineales de V a W, conservando los escalares de la combinación lineal.

Ejemplo 1

Analizar si la siguiente función es una transformación lineal:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid T\left(\underbrace{(x, y, z)}_{\in\mathbb{R}^2}\right) = \underbrace{(x + z, y - 2z)}_{\in\mathbb{R}^2}$$

Resolución

Controlemos primero que el transformado del 0_V sea el 0_W. Ésta es una condición <u>necesaria</u>: si no se cumpliera, no sería transformación lineal. Como $T\big((0,0,0)\big) = (0,0)$, la función dada es "candidata" a ser transformación lineal.

Para demostrar que es una transformación lineal tenemos que comprobar las condiciones dadas en la definición.

Condición 1: $T(u + v) = T(u) + T(v) \ \ \forall u, v \in V$

Tomemos dos vectores de $\mathbb{R}^3$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

Veamos si

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

Primero hacemos la suma de u y v:

$$u + v = \left(\underbrace{u_1 + v_1}_{x}, \underbrace{u_2 + v_2}_{y}, \underbrace{u_3 + v_3}_{z}\right)$$

Y ahora aplicamos T:

$$T(u + v) = (u_1 + v_1 + u_3 + v_3 \, , u_2 + v_2 - 2u_3 - 2v_3)$$

$$T(u+v) = \underbrace{(u_1+u_3,\ u_2-2u_3)}_{T(u)} + \underbrace{(v_1+v_3,\ v_2-2v_3)}_{T(v)}$$

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

En conclusión: se cumple la primera de las condiciones.

Nos faltaría la otra propiedad.

Condición 2: $T(k.v) = k.T(v) \quad \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{T(k.v)} = T\big((kv_1, kv_2, kv_3)\big) = (kv_1 + kv_3, kv_2 - 2kv_3)$$

$$= k.(v_1+v_3, v_2-2v_3) = \boldsymbol{k.T(v)}$$

Como T cumple las dos condiciones, es una transformación lineal.

Ejemplo 2

Analizar si la siguiente función es una transformación lineal:

$$F: P_2 \to \mathbb{R} \ \mid \ F(p) = p(0)$$

Observación: con P_2 se designa al conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que dos, con el polinomio nulo.

Resolución

Entonces a un polinomio p de grado menor o igual que dos, le aplicamos la función F y obtenemos un número real que proviene de evaluar el polinomio en $x = 0$.

$$p \in P_2 \longrightarrow p(0) \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo evaluemos la transformación en $x^2 - 1$:

$$F\left(\underbrace{x^2-1}_{p}\right) = -1 \in \mathbb{R}$$

Veamos si el vector nulo del espacio vectorial P_2 va al $0 \in \mathbb{R}$ (es condición necesaria).

El polinomio cero es:

$$0_{P_2} = \ 0x^2 + 0x + 0$$

¿Cuánto vale el polinomio nulo evaluado en 0? 0

$$0_{P_2}(0) = 0.0^2 + 0.0 + 0 = 0$$

Entonces la condición necesaria para este ejercicio se cumple, porque $F\left(0_{P_2}\right) = 0$

Primera condición $F(u+v) = F(u) + F(v)\ \forall u, v \in V$

Para que sea transformación lineal se debe cumplir la primera condición. Veamos qué pasa con el transformado de la suma:

$$(p+q) \in P_2$$

$$F(p+q) = (p+q)(0) = p(0) + q(0)$$

Observación: evaluar una suma de funciones en 0, es evaluar cada una en 0 y sumarlas. Esto no es una particularidad de los polinomios, sino que se corresponde con la definición de suma de funciones:

Para cualquier función: $(f\ +\ g)\ (x)\ =\ f(x)\ +\ g(x)$, para todo x perteneciente al dominio de f y de g.

Otra forma de pensar la misma propiedad. Si consideramos

$p(x) = ax^2 + bx + c$ y $q(x) = dx^2 + ex + f$

$$p\ +\ q\ =\ (a+d)x^2\ +\ (b+e)\,x\ +\ (c+f)$$

$$F(p+q)\ =\ c\ +\ f\ =\ F(p)\ +\ F(q)$$

Por los dos caminos arribamos a la misma conclusión.

Segunda condición $F(k.v) = k.F(v)\ \ \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

Veamos si se cumple la segunda condición. Para esto podemos recordar que dada una función $f(x)$ y un escalar k, la función $(k.f)(x)$ se define como $k.f(x)$. De esta forma podemos decir:

$$p \in P_2\ \ ,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{F(k.p)} = (k.p)(0) = k.p(0) = \boldsymbol{k.F(p)}$$

Otra forma de verlo es escribir a un polinomio $p \in P_2$ de forma genérica y aplicar la transformación sobre $k.p$:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\boldsymbol{F(k.p)} = F\big(k.(ax^2+bx+c)\big) = F(k.ax^2 + k.bx + k.c) = k.c = \boldsymbol{k.F(p)}$$

Ejemplo 3

Consideremos la transformación lineal:

$$T: R^3 \to R^3\ \ ,\ \ T(v) = v \times w_0$$

Siendo w_0 un vector fijo y v un vector cualquiera de R^3. Veamos que se trata de una transformación lineal.

Condición 1: $T(u+v) = T(u) + T(v)\ \ \forall u, v \in V$

Para ver que se cumple esta condición usaremos la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores:

$$v_1, v_2 \in R^3, \quad T(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) \times w_0 = v_1 \times w_0 + v_2 \times w_0 = T(v_1) + T(v_2)$$

Condición 2: $T(k.v) = k.T(v) \quad \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

Para ver que se cumple esta condición podemos extraer el escalar:

$$T(k.v) = (kv) \times w_0 = k.(v \times w_0) = k.T(v)$$

Ejemplo 4

Consideremos las siguientes transformaciones:

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad T_1\big((x, y)\big) = (2x - 1, y)$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad T_2\big((a, b)\big) = (a^2, b)$$

¿Cómo analizamos si son o no son transformaciones lineales?

Para la primera transformación basta con ver que la imagen de $(0,0)$ es $(-1,0)$. No se cumple una de las propiedades de las transformaciones lineales, entonces no es una transformación lineal.

La segunda transformación no cumple con la segunda condición ya que:

- $T_2(k.(a, b)) = (k^2.a^2, kb)$
- $k.T_2(a, b) = (k.a^2, kb)$

Luego, como no se cumple que $T(k.v) = k.T(v)$ podemos afirmar que T_2 no es una transformación lineal.

Núcleo, imagen y teorema de las dimensiones

Núcleo de una transformación lineal

Sea $F : V \to W \quad$ transformación lineal

Llamamos núcleo de F al conjunto de vectores del dominio cuya imagen por F es el 0_W.

$$Nu(F) = \{v \in V \mid F(v) = 0_W\}$$

*El **núcleo** de una transformación lineal es un **subespacio de V**.*

Imagen de una transformación lineal

Llamamos imagen de F al conjunto de vectores de W que son imagen de algún vector de V.

$$Im(F) = \{w \in W \mid w = F(v), v \in V\}$$

*La **imagen** es un **subespacio de W**.*

Ejemplo 1

Dada la siguiente transformación lineal

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , T\big((x, y, z)\big) = (x - 2y, 0, 2x - 4y)$$

Buscar el núcleo, la imagen, y determinar sus dimensiones.

Resolución

Para determinar el núcleo planteamos:

(x, y, z) está en el núcleo $\Leftrightarrow\ T\big((x, y, z)\big) = (0,0,0)$

$$(x - 2y, 0, 2x - 4y) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

Esto implica que la primera componente debe ser el doble de la segunda y que la tercera componente no tiene restricciones. Es un error común, en este punto, suponer que como "no aparece z", entonces $z = 0$. Pero es importante notar que si "no aparece z" esto significa que no existen restricciones sobre esa componente. La forma de un vector del núcleo sería:

$$(2y, y, z)$$

Aplicando propiedades lo podemos escribir:

$$y.(2,1,0) + z.(0,0,1)$$

Luego el núcleo es:

$$Nu(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\} = gen\{(2,1,0), (0,0,1)\}$$

Y una base del núcleo es:

$$B_{Nu} = \{(2,1,0), (0,0,1)\}$$

La imagen la podemos obtener aplicando propiedades sobre la expresión que define la transformación lineal:

$$(x - 2y, 0, 2x - 4y) = x.(1,0,2) + y.(-2,0,-4)$$

Los vectores $(1,0,2)$ y $(-2,0,-4)$ son linealmente dependientes. Entonces tomamos uno de ellos para la base de la imagen:

$$B_{Im} = \{(1,0,2)\}$$

Finalmente podemos responder sobre las dimensiones de núcleo e imagen, porque hemos obtenido bases de estos subespacios:

$$dim(Nu) = 2$$

$$dim(Im) = 1$$

Ejemplo 2

Dada la siguiente transformación lineal

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2} \quad F\big((x,y,z)\big) = \begin{pmatrix} x+y & x-z \\ 0 & y+z \end{pmatrix}$$

Buscar el núcleo, la imagen, y determinar sus dimensiones.

Resolución

Para determinar el núcleo planteamos:

(x,y,z) está en el núcleo $\Leftrightarrow \; F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x+y & x-z \\ 0 & y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x = z = -y$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado. El núcleo queda definido entonces por vectores con la forma:

$$(-y, y, -y) = y.(-1,1,-1)$$

Entonces:

$$Nu(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = -y\} = gen\{(-1,1,-1)\}$$

$$B_{Nu} = \{(1,-1,1)\}$$

La imagen la podemos obtener aplicando propiedades sobre la expresión que define la transformación lineal:

$$\begin{pmatrix} x+y & x-z \\ 0 & y+z \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, estas tres matrices generan la imagen, porque cualquier vector de la imagen es combinación lineal de ellas.

$$Im(T) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

La generan, pero ¿son una base de la imagen?

Observamos que las dos primeras son linealmente independientes. Pero la tercera es combinación lineal de las anteriores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces una base de la imagen es:

$$B_{Im} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora podemos responder sobre las dimensiones:

$$\dim(Nu) = 1$$

$$\dim(Im) = 2$$

Notemos que la suma de las dimensiones de núcleo e imagen es igual a la dimensión del dominio de la transformación lineal:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Esto no es casual, sino que se trata de un teorema que consideraremos a continuación.

Teorema de las dimensiones

El teorema de las dimensiones establece una relación aritmética sencilla entre la dimensión de V y la dimensión del núcleo y de la imagen.

Sea $F: V \to W$ transformación lineal. Si $dim(V) = n$ (finita) entonces:

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}\big(\boldsymbol{Nu}(\boldsymbol{F})\big) + \mathbf{dim}\big(\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{F})\big)$$

Ejemplo 1

Buscar el núcleo y la imagen de la siguiente transformación lineal

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid T\left(\underbrace{(x,y,z)}_{\in\mathbb{R}^3}\right) = \underbrace{(x+z, y-2z)}_{\in\mathbb{R}^2}$$

Resolución

Buscar el núcleo de la transformación lineal es buscar los vectores del dominio cuya imagen es el vector nulo del codominio:

$$T\big((x,y,z)\big) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -z \wedge y = 2z$$

Luego los vectores del núcleo son de la forma:

$$(-z, 2z, z) = z(-1,2,1)$$

Así podemos escribir:

$$Nu = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \wedge y = 2z\} = gen\{(-1,2,1)\}$$

$$B_{Nu} = \{(-1,2,1)\} \Rightarrow \dim(Nu) = 1$$

El núcleo es una recta porque tiene dimensión 1.

¿Cuál es la dimensión de la imagen? Por el teorema de las dimensiones debe ser:

$$\dim(V) = \dim(NuT) + \dim(ImT)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} - \underbrace{\dim\big(Nu(T)\big)}_{1} = \dim(ImT) = 2$$

La imagen es todo el espacio $\mathbb{R}^2$ porque el único subespacio de dimensión 2 que está en $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}^2$.

¿Cómo se llaman las funciones cuya imagen coincide con el codominio? Sobreyectivas.

Diremos entonces que T es una transformación lineal sobreyectiva.

Ejemplo 2

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal,

$$T(x,y) = (x-2y, 2x-4y, -2x+4y)$$

Buscar una base y la dimensión de $Nu(T), Im(T)$

Resolución

Por el teorema de las dimensiones la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen debe ser 2. Es decir que puede ser alguno de los siguientes escenarios:

- $2+0$
- $1+1$
- $0+2$

Busquemos $Nu(T)$:

$$(x-2y, 2x-4y, -2x+4y) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-4y=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

Luego podemos dar una base del núcleo y su dimensión:

$$B_{Nu} = \{(2,1)\} \Rightarrow \dim(Nu) = 1$$

Busquemos $Im(T)$. Un vector está en la imagen si es el transformado de algún vector del dominio:

$$\mathrm{T}(x,y) = (x-2y, 2x-4y, -2x+4y)$$

Lo expresamos como suma de vectores separando las variables x e y:

$$T(x,y) = (x, 2x, -2x) + (-2y, -4y, 4y)$$

Y sacamos como escalares a las variables:

$$= x(1,2,-2) + y(-2,-4,4)$$

Este método permite obtener *generadores* de la imagen, que pueden ser LI o LD. Acá se ve muy claro que $(-2,-4,4)$ = (- 2)$.(1,2,-2)$. Es decir que generan la imagen pero son linealmente dependientes, no es una base. Cualquiera de los dos sirve como base:

$$B_{Im(T)} = \{(1,2,-2)\} \Rightarrow \dim\big(Im(T)\big) = 1$$

Más adelante veremos otro método para encontrar la imagen.

Ejemplo 3

Hallar núcleo e imagen de la siguiente transformación lineal:

$$F: P_2 \to \mathbb{R} \mid F(p) = p(0)$$

Resolución

Notemos que los números reales pueden ser entendidos como un espacio vectorial de dimensión 1.

Si $p(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ p(0) = c$

El núcleo estará formado por todos los polinomios cuyo término independiente es 0.

¿Cuál es una base para ese espacio vectorial? Podríamos describir al núcleo así:

$$Nu(F) = \{ax^2 + bx, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Una base natural es la constituida por los vectores: x^2 y x.

Entonces: $$B_{Nu} = \{x^2,\ x\} \Rightarrow \dim(Nu) = 2$$

Aplicando el teorema:

$$\dim(Im) = 1$$

Y ahora si consideramos que la imagen está incluida o es igual a $\mathbb{R}$, entonces:

$$Im(F) = \mathbb{R}$$

¿Y una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}$? Puede servir cualquier número real, menos el cero. Tomamos por ejemplo:

$$B_{Im} = \{1\}$$

Los transformados de una base generan la imagen

Sea $F: V \to W$ transformación lineal , y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *base de* V

Entonces:

$$w \in Im(F) \Leftrightarrow\ w = F(v), v \in V \Leftrightarrow\ w = F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\ )$$

$$\Leftrightarrow\ w = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n)$$

Hemos demostrado que:

$$\boldsymbol{Los\ transformados\ de\ una\ base\ del\ dominio, generan\ la\ imagen.}$$

O sea, aplicando la transformación lineal a los vectores de una base (cualquiera) del dominio, se obtiene un conjunto de generadores de la imagen:

$$\{F(v_1), F(v_2), F(v_3), \ldots, F(v_n)\}\ generan\ Im(F)$$

No estamos diciendo que constituyan una base de la imagen, sino que la generan.

Ahora veremos un ejemplo sobre cómo se aplica esto:

Ejemplo 1

Sea F la siguiente transformación lineal:

$$F: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3 \text{ transformación lineal} \quad , \quad F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b + d, -d, d)$$

Hallar una base de la imagen.

Resolución

Podemos elegir una base del dominio y aplicar la transformación, obteniendo así un conjunto generador de la imagen.

Si son LI, ya tenemos una base de la imagen. Si son LD, tendremos que eliminar "lo que sobra" para conseguir una base.

Usemos la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,-1,1)$$

Entonces obtuvimos el siguiente conjunto de generadores:

$$\{(1,0,0), (0,0,0), (1,-1,1)\}$$

Nos quedamos con un conjunto linealmente independiente:

$$B_{Im} = \{(1,0,0), (1,-1,1)\}$$

Si la dimensión de la imagen es 2, puedo conocer la dimensión del núcleo. Como el dominio tiene dimensión 4, la dimensión del núcleo debe ser:

$$\dim(V) - \dim(Im) = \dim(Nu) = 2$$

Busquemos el núcleo:

$$(a+b+d, -d, d) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b+d=0 \\ -d=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow d=0 \wedge a=-b \ \forall c \in \mathbb{R}$$

Y la variable c queda libre porque no aparece ninguna condición sobre ella. Entonces:

$$Nu = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{Nu} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lo cual es coherente con la dimensión del núcleo que calculamos anteriormente.

Ejemplo 2

Consideremos la transformación lineal:

$$T: R^3 \to R^3 \ , \ T(v) = v \times w_0$$

Siendo $w_0 = (0,0,1)$ un vector fijo y v un vector cualquiera de R^3.

a) Hallar el núcleo, una base del núcleo y su dimensión

b) Hallar la imagen, una base de la imagen y su dimensión

Resolución

Ya analizamos anteriormente que es una trasformación lineal.

Sabemos que un vector pertenece al núcleo de la transformación sí y sólo si su transformado es el vector nulo:

$$(x,y,z) \in Nu(T) \Leftrightarrow T\big((x,y,z)\big) = (0,0,0)$$

Entonces transformemos a un vector genérico e igualémoslo al vector nulo para ver qué condiciones debe cumplir ese vector genérico:

$$(x,y,z) \times (0,0,1) = (y, -x, 0) = (0,0,0)$$

Es decir que el núcleo está formado por los vectores que cumplen que $x = 0 \wedge y = 0$. Estos son los vectores paralelos al eje z.

$$Nu(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | \ x = 0 \wedge y = 0\}$$

$$B_{Nu(T)} = \{(0,0,1)\}$$

$$\dim\big(Nu(T)\big) = 1$$

¿Se podría haber pensado esto geométricamente? ¿Cuál es el conjunto de vectores tales que su producto vectorial con $(0,0,1)$ es el vector nulo?

Obtengamos la imagen a partir de que los transformados de una base del domino generan la imagen.

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$T\big((1,0,0)\big) = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0)$$

$$T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \times (0,0,1) = (1,0,0)$$

$$T\big((0,0,1)\big) = (0,0,1) \times (0,0,1) = (0,0,0)$$

Luego:

$$Im(T) = gen\{(0,-1,0),(1,0,0),(0,0,0)\}$$

Sacando el vector nulo obtenemos un conjunto linealmente independiente, y así una base de la imagen:

$$B_{Im(T)} = \{(0,-1,0),(1,0,0)\}$$

$$\dim\big(Im(T)\big) = 2$$

¿Se podría haber pensado esto geométricamente? ¿Cuál es el conjunto de vectores que se obtiene al hacer el producto vectorial de cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ con $(0,0,1)$?

¿Cómo generalizarían para un w_0 cualquiera, no nulo? En el siguiente archivo de GeoGebra se puede explorar la situación. Hay tres vectores:

- Un vector fijo, en color negro.
- Un vector móvil en color verde.
- Un vector rojo que es el resultado del producto vectorial entre los otros dos.

Te proponemos que muevas el vector verde y veas que se va obteniendo cómo el conjunto de vectores que se obtienen de los sucesivos productos vectoriales:

HTTP://BIT.LY/AGAGGB018

Clasificación de las transformaciones lineales

Monomorfismos: TL inyectivas

Recordemos que una función $F: A \to B$ es *inyectiva* si verifica la siguiente propiedad:

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

En el caso particular de las T.L., puede demostrarse que:

Sea $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ una transformación lineal,

$\boldsymbol{F}$ es inyectiva (monomorfimo) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Nu(F)} = \{\boldsymbol{0_V}\}$

Epimorfismos: TL sobreyectivas

$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es sobreyectiva (epimorfismo) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Im(F)} = \boldsymbol{W}$

Isomorfismos: TL biyectivas

$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ es biyectiva (isomorfismo) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Nu(F)} = \{\boldsymbol{0_V}\} \wedge \boldsymbol{Im(F)} = \boldsymbol{W}$

Ejemplo 1

Consideremos la siguiente transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $T\big((x, y)\big) = (x + y, x - y, 2x)$

Saquemos el núcleo de la transformación:

$$(x, y) \in Nu(T) \Leftrightarrow T\big((x, y)\big) = (0,0,0)$$

$$(x + y, x - y, 2x) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \wedge y = 0$$

Entonces por la propiedad enunciada anteriormente podemos decir que T es un monomorfismo.

Por el teorema de las dimensiones resulta:

$$\dim(Im) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(Nu) = 2 - 0 = 2$$

Como la dimensión de la imagen es 2, entonces <u>no</u> es un epimorfismo (sobreyectiva).

Conclusión: T es un monomorfismo.

Ejemplo 2

Consideremos la transformación lineal $F: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$, $F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b, -d)$

Busquemos su imagen:

$$(a + b, -d) = a.(1,0) + b.(1,0) + d.(0, -1)$$

$$\Rightarrow Im(F) = gen\{(1,0), (1,0), (0, -1)\} \quad \Rightarrow B_{Im(F)} = \{(1,0), (0, -1)\} \Rightarrow \dim\big(Im(F)\big) = 2$$

Entonces la imagen es $\mathbb{R}^2$, y la transformación es un epimorfismo (sobreyectiva).

Apliquemos el teorema de las dimensiones para conocer la dimensión del núcleo:

$$\dim(Nu(F)) = \dim(\mathbb{R}^{2\times2}) - \dim(Im(F)) = 4 - 2 = 2$$

Entonces no es un monomorfismo.

Conclusión: F es un epimorfismo.

Ejemplo 3

Consideremos la siguiente transformación lineal

$$G: \mathbb{R}^2 \to P_1 \quad , \quad G((a,b)) = 2a - bx$$

Busquemos su núcleo:

$$2a - bx = 0 + 0.x \ \Rightarrow a = 0 \ \wedge \ b = 0 \Rightarrow Nu(G) = \{(0,0)\} \Rightarrow \dim(Nu(F)) = 0$$

Por la propiedad enunciada anteriormente, podemos afirmar que G es un monomorfismo.

Veamos cuál es la imagen:

$$2a.(\mathbf{1}) + b.(-\boldsymbol{x}) \ \Rightarrow Im(G) = gen\{1, -x\} \Rightarrow \dim(Im(G)) = 2$$

Por lo tanto la imagen es P_1 y la transformación es un epimorfismo (sobreyectiva).

Como es monomorfismo y epimorfismo, entonces es un isomorfismo.

Ejemplo 4

¿Habrá alguna TL que no sea ni monomorfismo, ni epimorfismo? ¿Que no sea ni inyectiva ni sobreyectiva?

Consideremos la siguiente TL que analizamos en el ejemplo 2 de "Imagen de una TL":

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times2} \quad , \quad F((x,y,z)) = \begin{pmatrix} x+y & x-z \\ 0 & y+z \end{pmatrix}$$

Vimos que $B_{Nu} = \{(1,-1,1)\}$, así que no es un monomorfismo.

Vimos que $B_{Im} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, así que no es un epimorfismo.

Conclusión: existen TL que no son ni monomorfismos ni epimorfismos.

Propiedad

Sea $F: V \to W$ una TL., $\boldsymbol{dim(V) = dim(W) = n}$

Puede afirmarse que: **F es inyectiva $\Leftrightarrow$ F es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ F es biyectiva**

Sugerimos al lector demostrar esta propiedad, teniendo en cuenta que:

$$F \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \; Nu(F) = \{0_V\} \; \Leftrightarrow \; dim(Nu) \; = \; 0$$

Ejemplo

Dada la TL $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z\,,\ 2y\ +\ z,\ 3y\ +\ kz)$, encontrar todos los valores de k para los cuales T es biyectiva (isomorfismo).

Resolución

Como la TL va de $\mathbb{R}^3$a$\mathbb{R}^3$, es suficiente analizar para qué valores de *k* es inyectiva (o sobreyectiva).

Por inyectividad

Si pensamos en la inyectividad, tenemos que buscar que el núcleo sea $\{(0,0,0)\}$. Es decir que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \ 2y + z = 0 \\ 3y + kz = 0 \end{cases}$$

tiene que ser compatible determinado. Hemos visto que un sistema de ecuaciones $A.X = b$ es compatible determinado $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, así que planteamos esta condición para hallar los valores de k:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & k \end{vmatrix} = 1.(2k - 3) \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{3}{2}$$

Luego $\forall k \in \mathbb{R},\ k \neq \frac{3}{2}$ la transformación lineal T es biyectiva.

Por sobreyectividad

Si pensamos en la sobreyectividad, tenemos que buscar que la dimensión de la imagen sea 3 (o sea que la imagen sea R^3). Recordemos que los transformados de una base del dominio generan la imagen:

$$T(1,0,0) \ = (1,0,0)$$

$$T(0,1,0) \ = (1,2,3)$$

$$T(0,0,1) \ = (1,1,k)$$

Como queremos que sea sobreyectiva, los tres vectores que se obtuvieron deben generar todo $\mathbb{R}^3$, así que deben ser LI. Recordemos que:

$$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rango(A) = n \Leftrightarrow las\ filas\ (columnas) de\ A\ son\ LI$$

Apliquemos esta propiedad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 2k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{3}{2}$$

Así que hemos llegado a la misma conclusión: si $k \neq \frac{3}{2}$ la transformación lineal T es biyectiva.

Resumiendo: no es necesario analizar inyectividad y sobreyectividad separadamente, ya que una de ellas implica la otra y por lo tanto, que se cumpla una de ellas implica que la transformación lineal es biyectiva. Esto sólo ocurre cuando el dominio y el codominio tienen la misma dimensión.

Para pensar:

Si las dimensiones del dominio y del codominio son distintas, ¿la TL puede ser biyectiva?

Para responder, les sugerimos que consideren dos casos:

i) $dim(V) > dim(W)$

ii) $dim(V) < dim(W)$

EPL 1

Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, x + ky - z, 3y - kz)$

Hallar en cada caso los valores de k para los cuales:

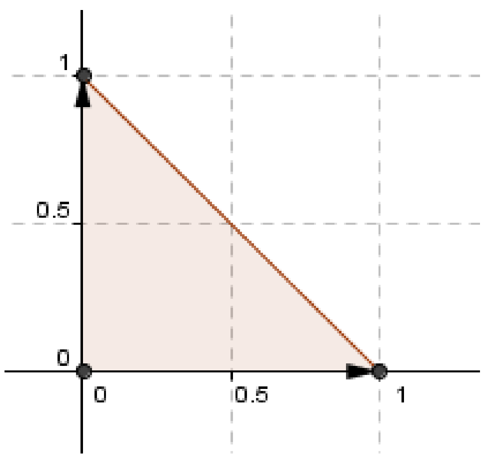
a) T es biyectiva.

b) T no es biyectiva y $(0,1,-1)$ pertenece a la imagen de T.

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

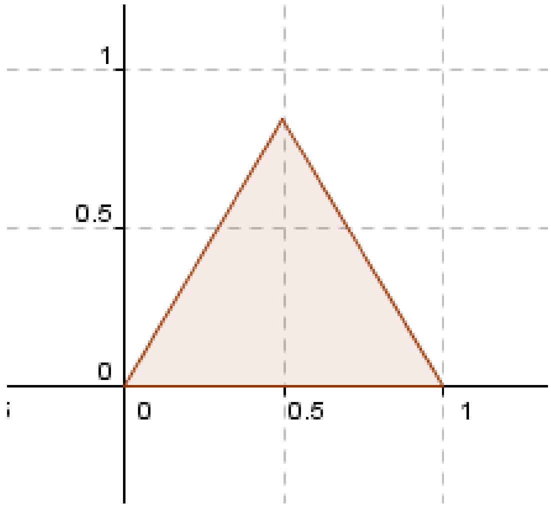
¿Qué se necesita para definir una transformación lineal?

Consideremos el siguiente triángulo en $\mathbb{R}^2$:



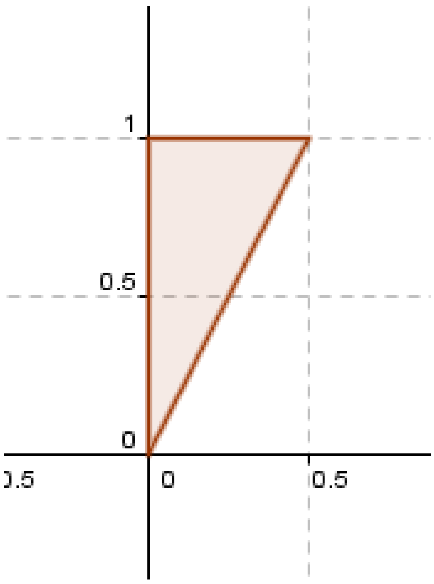
Triángulo 1

¿Existirá alguna transformación lineal que permita modificar de cierta manera este triángulo? Por ejemplo, una F que transforme el triángulo dado en este otro:



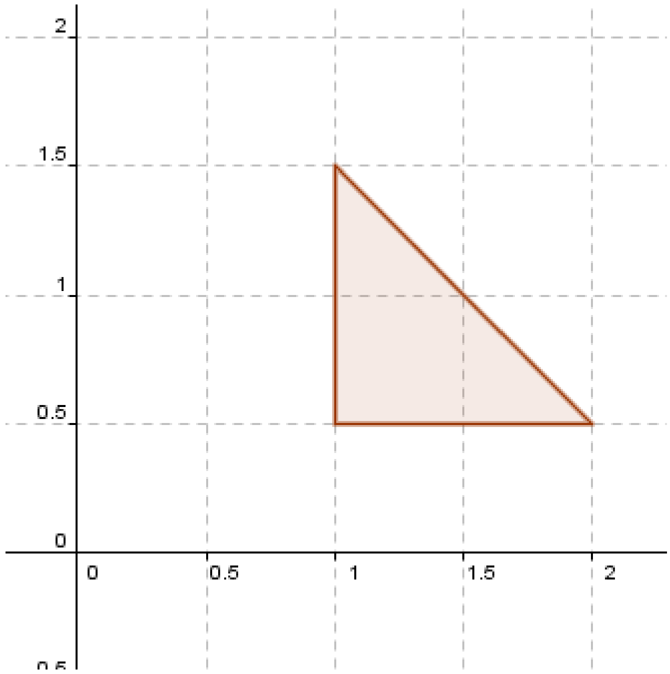
Triángulo 2

O alguna que lo transforme así:



Triángulo 3

O un movimiento como éste:



Triángulo 4

El triángulo 4 no contiene al (0,0), por lo tanto no puede obtenerse aplicando una transformación lineal al triángulo 1. ¿Por qué?

¿Los otros podrán obtenerse mediante una transformación lineal? ¿Existe alguna herramienta teórica que permita asegurarlo?

Sí, es el teorema fundamental de las transformaciones lineales.

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Este teorema, conocido también como "Teorema de existencia y unicidad de una transformación lineal", dice lo siguiente:

Sean los espacios vectoriales V y W, sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una *base* de V y $w_1, w_2, \dots, w_n$ vectores *cualesquiera* (iguales o distintos) de W. Entonces existe una única transformación lineal que verifica:

$$\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ \quad\dots \\ T(v_n) = w_n \end{cases}$$

Para demostrarlo habría que demostrar que esa transformación existe, que es única, y que es lineal. No lo vamos a demostrar pero lo pueden encontrar en textos de álgebra lineal. En el texto recomendado de Ana María Kozak y otros autores, *Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal*, está en página 561 y siguientes.

Ejemplo 1

Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$

Consideremos en la base $B = \{(1,0),(1,1)\}$, y sean $w_1 = w_2 = (0,1,0)$

De acuerdo con el teorema, existe una única transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$T\big((1,0)\big) = (0,1,0)$$

$$T\big((1,1)\big) = (0,1,0)$$

¿Cómo buscamos la fórmula de la transformación lineal?

Tomamos un vector genérico de $\mathbb{R}^2$ y lo escribimos como combinación lineal de la base, o sea buscamos sus coordenadas respecto de B:

$$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \end{cases}$$

Los escalares α, β son las cordenadas del vector (x,y) en la base B:

$$[(x,y)]_B = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$$

Donde recordemos que la escritura $[(x,y)]_B$ significa “las coordenadas del vector (x,y) en la base B".

$$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$$

Aplicamos la transformación lineal a ambos miembros:

$$\Rightarrow \; T(x,y) = T\big(\alpha(1,0) + \beta(1,1)\big)$$

Por las propiedades de las transformaciones lineales,

$$T(x,y) = \alpha.\underbrace{T(1,0)}_{(0,1,0)} + \beta.\underbrace{T(1,1)}_{(0,1,0)}$$

Reemplazamos α y β :

$$T(x,y) = (x-y).(0,1,0) + y(0,1,0)$$

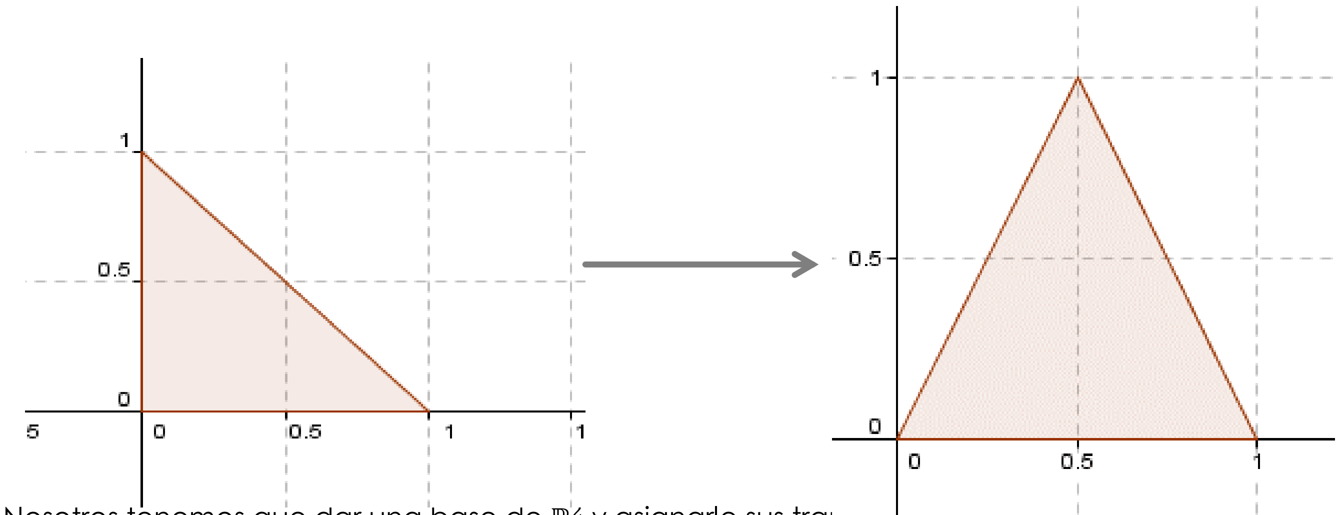
$$T(x,y) = (0, x-y, 0) + (0, y, 0)$$

$$T\big((x,y)\big) = (0, x, 0)$$

Hemos obtenido la fórmula de la transformación lineal que cumple con las condiciones.

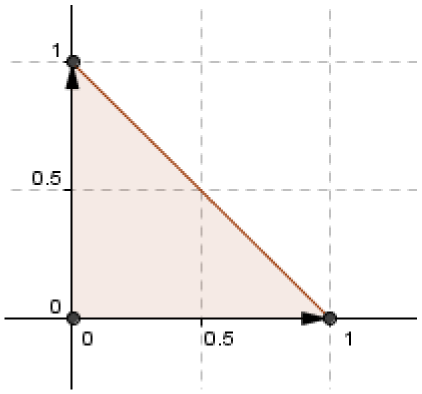
Ejemplo 2

Vamos a ver si podemos transformar el triángulo del esquema de la izquierda, en el triángulo del esquema que está a la derecha:



Nosotros tenemos que dar una base de $\mathbb{R}^2$ y asignarle sus transformados.

Por ejemplo consideremos los versores canónicos que definen al primer triángulo:



Entonces podríamos hacer la siguiente asignación:

$$F\big((1,0)\big) = (1;0)$$

$$F\big((0,1)\big) = \left(\frac{1}{2};1\right)$$

Como $(1,0),(0,1)$ constituyen una base del dominio, el teorema fundamental permite afirmar que existe una única transformación lineal que verifica esto:

$$\begin{cases} F\big((1,0)\big) = (1;0) \\ F\big((0,1)\big) = \left(\frac{1}{2};1\right) \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{TFTL} \exists \text{ una única TL que verifica estas condiciones}$$

Para encontrar la fórmula de esta trasformación vamos a escribir a un vector genérico de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los vectores de la base dada:

$$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \end{cases}$$

Ahora aplicamos la transformación lineal sobre ese vector genérico, y resolvemos para llegar a una expresión analítica de la transformación lineal:

$$F\big((x,y)\big) = F\big(\alpha(1{,}0) + \beta(0{,}1)\big)$$

$$F\big((x,y)\big) = \alpha.F\big((1{,}0)\big) + \beta.F\big((0{,}1)\big)$$

$$F\big((x,y)\big) = x.(1{,}0) + y.\left(\frac{1}{2};1\right)$$

$$F\big((x,y)\big) = (x,0) + \left(\frac{1}{2}y;y\right)$$

$$F\big((x,y)\big) = \left(\frac{1}{2}y + x;y\right)$$

En el siguiente archivo de GeoGebra se puede ver el triángulo original, y el transformado. También se puede redefinir la ubicación de los puntos del triángulo original y ver cómo quedaría el transformado en cada caso.

HTTP://BIT.LY/AGAGGB017

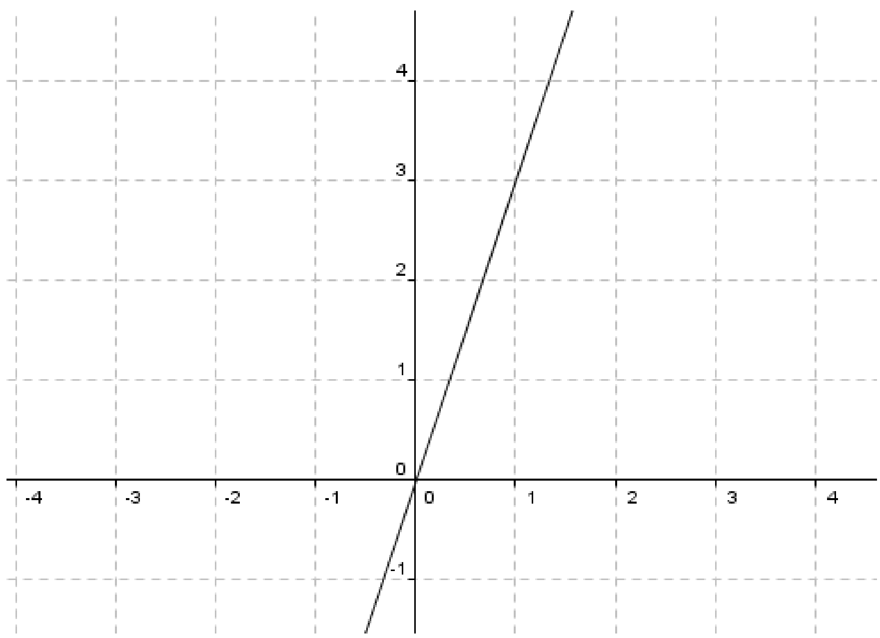
Ejemplo 3

Halle la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$):

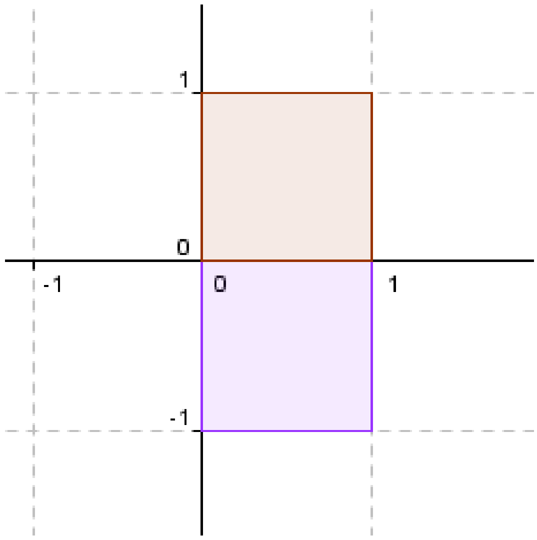
a) Simetría respecto de la recta $y = 3x$

Resolución

La clave para resolver este ejercicio es elegir una base conveniente para definir la simetría. Grafiquemos la recta $y = 3x$:



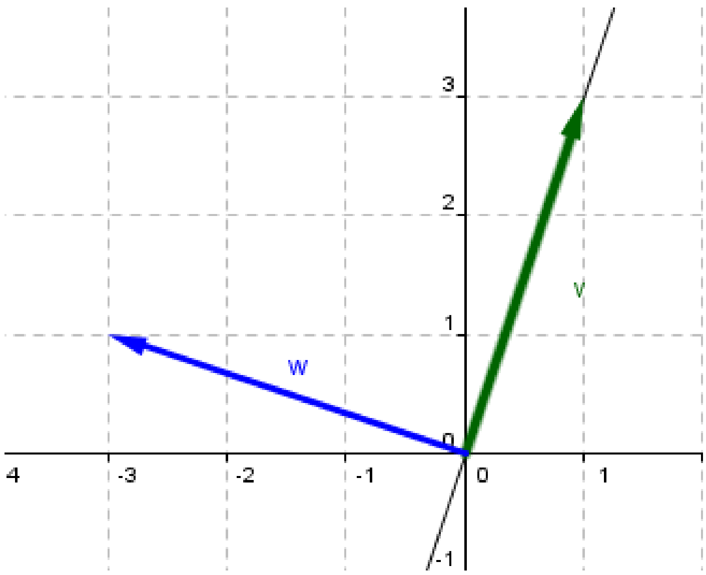
Primero hay que entender qué significa una reflexión respecto de una recta. Supongamos que nos piden una simetría respecto del eje x. Si tenemos un cuadrado así como el rojo, se transforma en un cuadrado como el violeta:



Todos los puntos que pertenecen al eje x quedan idénticos. Y los puntos que están sobre el eje y se transforman en su opuesto. Entonces:

$$\begin{cases} F\big((1,0)\big) = (1,0) \\ F\big((0,1)\big) = (0,-1) \end{cases}$$

Considerando estas ideas sobre simetría, en nuestro caso tomamos un vector que esté sobre el eje de simetría y otro perpendicular a él:



$$v = (1,3)\,, w = (-3,1)$$

¿Cuál es el transformado del vector (1,3) que está sobre el eje de simetría?

$$(1,3) \longrightarrow (1,3)$$

¿Cuál es el transformado del vector $(-3,1)$ que es perpendicular al eje de simetría?

$$(-3,1) \longrightarrow (3,-1)$$

Entonces:

$$\begin{cases} F\big((1,3)\big) = (1,3) & \text{porque está sobre el eje de simetría} \\ F\big((-3,1)\big) = (3,-1) & \text{porque es perpendicular al eje de simetría} \end{cases}$$

Ahora queda el problema técnico de buscar la fórmula de esta transformación lineal:

$$(x,y) = \alpha(1,3) + \beta(-3,1) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha - 3\beta \\ y = 3\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{y-3x}{10} \wedge \alpha = \frac{x+3y}{10}$$

Aplico F a ambos miembros

$$F\big((x,y)\big) = F\big(\alpha(1,3) + \beta(-3,1)\big)$$

Como F es transformación lineal:

$$F\big((x,y)\big) = \alpha . F\big((1,3)\big) + \beta F\big((-3,1)\big)$$

$$F\big((x,y)\big) = \left(\frac{x+3y}{10}\right).(1,3) + \left(\frac{y-3x}{10}\right)(3,-1)$$

$$F\big((x,y)\big) = \left(\frac{x+3y}{10}, \frac{3x+9y}{10}\right) + \left(\frac{3y-9x}{10}, \frac{-y+3x}{10}\right)$$

$$F\big((x,y)\big) = \left(\frac{6y-8x}{10}, \frac{6x+8y}{10}\right)$$

$$F\big((x,y)\big) = \left(\frac{3y-4x}{5}, \frac{3x+4y}{5}\right)$$

Podemos ver en GeoGebra cómo opera la transformación:

HTTP://BIT.LY/AGAGGB016

Ejemplo 4

El propósito de este ejercicio es destacar cuándo es posible aplicar el teorema fundamental de las transformaciones lineales. Sugerimos una lectura cuidadosa de cada uno de los casos presentados a continuación:

Analizar si existe y es única la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

Caso A

$$\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,1,1)\big) = (0,0,0) \end{cases}$$

Caso B

$$\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (1,0,0) \end{cases}$$

Caso C

$$\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (0,0,0) \end{cases}$$

Resolución

¿Cuál es la hipótesis del teorema? O sea, ¿qué debe cumplirse para que el teorema tenga validez?

Los vectores del dominio deben ser una base, es decir que debemos prestar atención en cada caso a los vectores señalados:

$$A:\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,1,1)\big) = (0,0,0) \end{cases} \quad B:\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (1,0,0) \end{cases} \quad C:\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (0,0,0) \end{cases}$$

Caso A

En el caso A los tres vectores son base de $\mathbb{R}^3$ y entonces podemos aplicar el Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales. Como lo establece el teorema, se puede afirmar que existe una única transformación lineal que verifica las condiciones dadas.

¿Cuál es el mecanismo para buscar la fórmula?

Consideramos un vector (x, y, z) y buscamos sus coordenadas respecto de la base de partida:

$$(x. y, z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y - z \\ \gamma = z \end{cases}$$

Aplicamos la transformación lineal a ambos miembros:

$$T\big((x, y, z)\big) = \alpha T\big((1,0,0)\big) + \beta T\big((0,1,0)\big) + \gamma T\big((1,1,1)\big)$$

Y ahora sustituimos las coordenadas obtenidas:

$$T\big((x, y, z)\big) = (x - z)(0,1,0) + (y - z)(0,1,0) + (z)(0,0,0)$$

$$T\big((x, y, z)\big) = (0, x - z, 0) + (0, y - z, 0) = (0, x + y - 2z, 0)$$

$$T\big((x,y,z)\big) = (0, x+y-2z, 0)$$

Caso B

En el caso B, el conjunto de vectores de partida es linealmente dependiente, no es base de $\mathbb{R}^3$. Si no se cumplen las hipótesis de un teorema, éste no puede aplicarse.

¿Cómo podemos determinar si existe una transformación lineal que verifique estas condiciones?

$$\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (1,0,0) \end{cases}$$

Lo que define a una transformación lineal es la *conservación de las combinaciones lineales*. ¡Esto es lo que debemos controlar!

Veamos la diferencia entre el caso B y el C:

Observamos que el tercer vector se puede obtener como combinación lineal de los primeros dos:

$$(1,-1,0) = (1,0,0) - (0,1,0)$$

Entonces entre sus transformados debería cumplirse la misma relación:

$$T\big((1,-1,0)\big) \overset{?}{=} T\big((1,0,0)\big) - T\big((0,1,0)\big)$$

$$\Rightarrow (1,0,0) \overset{?}{=} (0,1,0) - (0,1,0) = (0,0,0)$$

No se conserva la combinación lineal, entonces <u>no</u> existe una transformación lineal que cumpla las condiciones dadas.

Caso C

En el caso C tenemos la siguiente información:

$$\begin{cases} T\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (0,0,0) \end{cases}$$

Tampoco se puede aplicar el TFTL, porque el conjunto de vectores de partida es linealmente dependiente.

Igualmente podemos preguntarnos: ¿Se conserva la combinación lineal? Notemos que el tercer vector es la diferencia del primero con el segundo:

$$(1,-1,0) = (1,0,0) - (0,1,0)$$

Aplicamos la transformación lineal suponiendo que se conservan las combinaciones lineales:

$$T\big((1,-1,0)\big) \overset{?}{=} T\big((1,0,0)\big) - T\big((0,1,0)\big)$$

Reemplazando:

$$(0,0,0) \overset{?}{=} (0,1,0) - (0,1,0) = (0,0,0)$$

Lo cual es verdadero. Entonces podemos concluir que *existe la transformación lineal aunque no quede unívocamente determinada* por la información disponible. Para definir una TL bastaría con establecer cuáll es el transformado de un tercer vector LI con $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

Agreguemos un dato nuevo para que quede bien definida:

$$T\big((0,0,1)\big) = (0,0,1)$$

¿Existe una TL que cumpla con las condiciones iniciales más ésta que acabamos de agregar?

Llamemos:

$$\begin{cases} T_1\big((1,0,0)\big) = (0,1,0) \\ T_1\big((0,1,0)\big) = (0,1,0) \\ T_1\big((0,0,1)\big) = (0,0,1) \end{cases}$$

Ahora T_1 queda bien definida y podríamos hallar su fórmula.

¿Cómo podrían definir una transformación T_2 distinta de T_1 que también cumpla con las condiciones iniciales?

Resumamos lo que obtuvimos analizando estos tres casos:

- Caso A: La transformación lineal existe y es única.
- Caso B: No existe, no se conservan las combinaciones lineales.
- Caso C: Existe pero no es única, no podemos encontrar una fórmula porque la transformación lineal no quedó definida.

Ejemplo 5

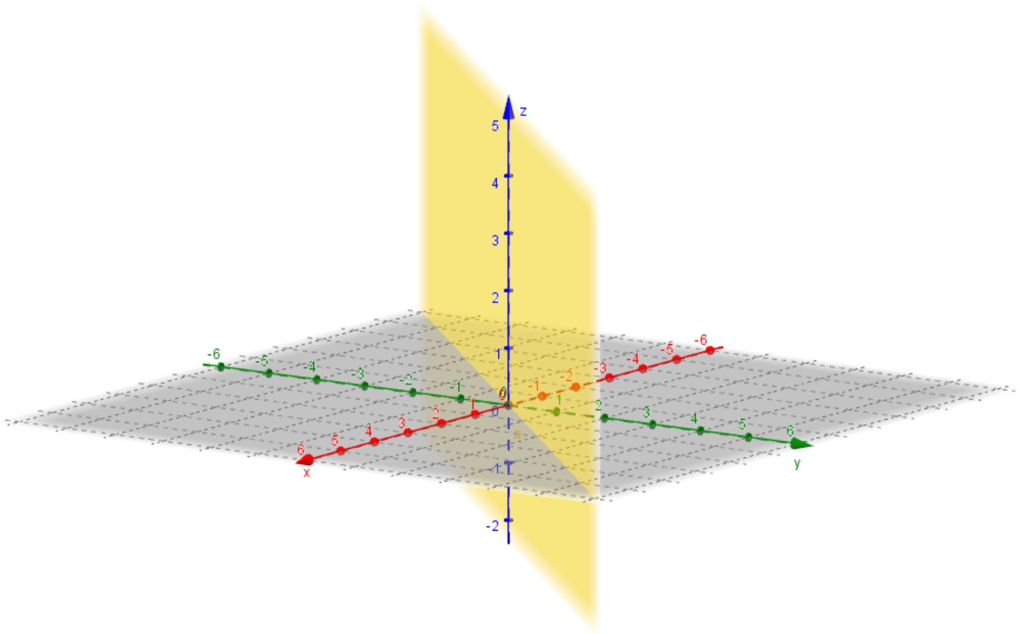
Halle la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) Reflexión respecto del plano $x = y$

Resolución

Este ejercicio requiere elegir una buena base.

Una gráfica del plano $x = y$ se puede ver a continuación:



El arte para resolver este ejercicio es elegir tres vectores linealmente independientes que sepamos en qué se transforman.

¿Cuál es el simétrico de un vector que esté sobre el plano? El mismo vector. Entonces podemos elegir dos vectores no paralelos incluidos en el plano:

$$T(v_1) = v_1$$

$$T(v_2) = v_2$$

¿Y si tomamos un vector perpendicular al plano, digamos v_3, en que se transforma?

$$T(v_3) = -v_3$$

Ahora debemos elegir v_1, v_2 y v_3 de acuerdo con el plano dado.

Proponemos:

$$v_1 = (1,1,0)$$

$$v_2 = (0,0,1)$$

$$v_3 = (1,-1,0)$$

Donde los vectores v_1 y v_2 están en el plano y el vector v_3 es perpendicular al plano.

De esta forma sabemos cómo se transforman:

$$\begin{cases} T\big((1,1,0)\big) = (1,1,0) \\ T\big((0,0,1)\big) = (0,0,1) \\ T\big((1,-1,0)\big) = (-1,1,0) \end{cases}$$

Ya queda definida la transformación lineal sobre una base del dominio. Dejamos a cargo del lector encontrar la fórmula de la TL.

Les proponemos que definan la TL sobre otra base con las mismas características: dos vectores del plano y uno perpendicular a él. Luego busquen la expresión analítica, ¿coincide con la anterior?

Los vectores no son únicos: v_1 y v_2 son dos vectores cualesquiera (LI) del plano y v_3 es un vector perpendicular cualquiera. No importa cuáles elijamos, obtendremos la misma transformación lineal.

EPL 2

Definir una transformación lineal F de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifique las dos condiciones que siguen:

i) $Nu(F) = gen\{(1,1,0)\}$, ii) $Im(F) \subseteq S = \{A \in \mathbb{R}^{2x2} : A = A^t\}$

Obtener la fórmula de la transformación definida.

Observación: este ejercicio no es de respuesta única.

Matriz asociada a una transformación lineal

Ejemplos introductorios

Ejemplo 1

Sea T la siguiente transformación lineal:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid T\big((x,y)\big) = (x+2y, x-y, y)$$

¿Existirá una matriz A que multiplicada por (x,y) dé por resultado $(x+2y, x-y, y)$?

Para esto vamos a escribir los vectores como columna:

$$A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$$

¿Cuál debería ser el tamaño de la matriz?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{3\times 2}.\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

Efectuando el producto de matrices, podemos obtener los coeficientes de A :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

Encontramos una matriz que realiza la transformación lineal. Se conoce como la *matriz estándar de la transformación lineal.*

Notemos que la transformación va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, y que el orden de la matriz es 3×2.

Ejemplo 2

Ahora consideremos la siguiente transformación lineal:

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid F\big((x, y, z)\big) = (x + 2z, -y)$$

Queremos buscar una matriz B tal que:

$$\underbrace{B}_{} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} x+2z \\ -y \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Pensando el orden de la matriz y el valor de sus elementos llegamos a:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 3} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} x+2z \\ -y \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Hemos hallado de manera intuitiva la matriz estándar de la transformación lineal. Notemos que la transformación va de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ y que el orden de la matriz asociada a la transformación lineal es 2×3.

Construcción de la matriz asociada a una TL

Hemos visto ejemplos de cómo surge a partir del producto de matrices, la matriz estándar de una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. En lo que sigue intentaremos generalizar para cualquier espacio vectorial de dimensión finita, el concepto de matriz asociada a una transformación lineal. Aun en el caso de TL en $\mathbb{R}^n$, veremos que no siempre la matriz estándar es la más conveniente.

Sea $T: V \to W$ transformación lineal, y

$$\dim(V) = n$$

$$\dim(W) = m$$

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \; base \; de \; V$$

$$B' = \{w_1, \dots, w_m\} \; base \; de \; W$$

Designamos:

$\boldsymbol{M(T)_{BB'}}$ a la matriz asociada a la transformación lineal T respecto de las bases B y B'.

Esta matriz se construye por columnas transformando los vectores de la base B (del dominio), y expresando los transformados en sus coordenadas en la base B':

$$\boldsymbol{M(T)_{BB'} = \left([T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad [T(v_3)]_{B'} \quad \dots \quad [T(v_n)]_{B'} \right)}$$

La matriz asociada tiene n columnas porque la base B tiene n vectores, y tiene m filas porque las coordenadas en B' se escriben con m componentes.

O sea que si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, $\boldsymbol{M(T)_{BB'}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times n}}$

Propiedad

La matriz asociada a una transformación lineal cumple la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{M(T)_{BB'}\,[v]_B = [T(v)]_{B'}}$$

Ejemplo 3

Retomemos la transformación lineal:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid T\big((x,y)\big) = (x+2y, x-y, y)$$

Consideremos las siguientes bases para el dominio y codominio:

$$B = \{(0,1),(1,1)\}$$

$$B' = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

Construyamos la matriz asociada a la transformación T de la base B a la base B', es decir $M(T)_{BB'}$:

$$T\big((0,1)\big) = (2,-1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1) \Rightarrow \big[T\big((0,1)\big)\big]_{B'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 1° columna}$$

$$T\big((1,1)\big) = (3,0,1) = \delta(1,0,0) + \epsilon(1,1,0) + \phi(0,1,1) \Rightarrow \big[T\big((1,1)\big)\big]_{B'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 2° columna}$$

$$M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado un vector cualquiera, aunque no conozcamos la fórmula, conociendo la matriz y las dos bases podemos calcular su transformado. Vamos a tomar un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ y lo transformamos… sin mirar la fórmula.

Hallemos $T\big((3,5)\big)$ mediante la matriz asociada $M(T)_{BB'}$:

$$M(T)_{BB'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$$

No podemos operar con (3,5) porque ***la matriz asociada opera con coordenadas.*** Debemos buscar las coordenadas de (3,5) en la base B.

$$(3,5) = \alpha(0,1) + \beta(1,1) \Rightarrow \beta = 3\,, \alpha = 2$$

Multiplicamos la matriz por las coordenadas que obtuvimos,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M(T)_{BB'}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{[v]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}}_{[T(v)]_{B'}}$$

El vector obtenido <u>no</u> es el transformado del vector (3,5) sino que son sus coordenadas en la base B'.

Para hallar $T(3,5)$ debemos multiplicar las coordenadas obtenidas por los vectores de la base B':

$$T\big((3,5)\big) = 20(1,0,0) - 7(1,1,0) + 5(0,1,1)$$

$$T\big((3,5)\big) = (13, -2, 5)$$

Ahora en lugar de tomar estas bases, tomemos las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.

Busquemos $M(T)_{E_2E_3}$ dónde:

$$E_2 = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$E_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

El procedimiento es el mismo pero las cuentas son más fáciles

$$T\big((1,0)\big) = (1,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta.(0,1,0) + \gamma.(0,0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ 1° \ columna$$

$$T\big((0,1)\big) = (2,-1,1) = \alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,0) + \gamma.(0,0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ 2° \ columna$$

Estos vectores hay que expresarlos en coordenadas respecto de la base canónica de R^3, pero justamente por tratarse de la base canónica, el vector y sus coordenadas son iguales. Entonces resulta:

$$M(T)_{E_2E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad \text{¡}Que\ es\ la\ matriz\ estándar\ de\ la\ TL!$$

Es decir que la matriz estándar es la que trabaja con las bases canónicas.

Ejemplo 4

Consideremos la siguiente transformación lineal:

$$F: \mathbb{R}^2 \to P_1 \mid M(F)_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,0), (1,1)\}$$

$$B' = \{1, 1 - x\}$$

a) Hallar $F\big((2,1)\big)$
b) Hallar la fórmula de la transformación lineal
c) Hallar el núcleo de la transformación lineal
d) Hallar la imagen de la transformación lineal
e) Hallar la imagen de la transformación pero sin utilizar la fórmula de la transformación lineal
f) Hallar el núcleo de la transformación sin utilizar la fórmula

Resolución

Ítem a

No tenemos la fórmula. Tenemos que trabajar con la matriz asociada. ¿Qué propiedad tiene la matriz asociada?

$$M(F)_{BB'}.[v]_B = [F(v)]_{B'}$$

Donde:

- $[v]_B$: son las coordenadas del vector v en la base B
- $[F(v)]_{B'}$: son las coordenadas del transformado del vector v en la base B'
- $M(F)_{BB'}$: es la matriz asociada a la transformación lineal en bases B y B'

Las matrices asociadas no operan con los vectores, sino con las coordenadas de los vectores en alguna base. Entonces no podemos multiplicar la matriz por el vector (2,1).

Para operar, tenemos que encontrar las coordenadas de (2,1) en la base B:

$$(2,1) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \wedge \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad [(2,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos por la matriz y obtenemos las coordenadas en B' del transformado de (2,1):

$$\big[F\big((2,1)\big)\big]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Qué objeto esperamos obtener como imagen de esta transformación? ¿Un vector de $\mathbb{R}^2$? No, esperamos obtener un polinomio de grado menor o igual que uno.

Para obtener F(2,1) debemos multiplicar estas coordenadas por los vectores de la base B':

$$F\big((2,1)\big) = 3.1 + 3.(1-x) = 6 - 3x$$

Ítem b

En el ítem (a) buscamos la imagen del vector (2,1). Ahora nos proponemos obtener la fórmula de la transformación, esto significa encontrar la imagen de *cualquier* vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Teniendo en cuenta que en el polinomio usamos la variable x, llamaremos (a, b) a los vectores de R2.

Busquemos $F\big((a,b)\big)$ tal como buscamos $F\,((2,1))$:

$$(a,b) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - b \\ \beta = b \end{cases}$$

$$[(a,b)]_B = \begin{pmatrix} a-b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\big[F\big((a,b)\big)\big]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix}$$

Éstas son las coordenadas del vector que estamos buscando. Falta multiplicar por los vectores de la base B':

$$F\big((a,b)\big) = (a+b).1 + (a+b)(1-x) = 2a + 2b - (a+b).x$$

Ésta es la fórmula de la transformación lineal.

Ahora podemos hallar base y dimensión de núcleo e imagen.

Ítem c

La definición de núcleo dice que son los vectores del dominio que se transforman en el vector nulo del codominio.

$$-(a+b)x + 2(a+b) = 0_{P_1} = 0x + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow Nu(F) = \{(a,-a) \in \mathbb{R}^2\} \Rightarrow B_{Nu} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \;\Rightarrow\; \dim\big(Nu(F)\big) = 1$$

Ítem d

Por el teorema de las dimensiones:

$$\dim\big(Im(F)\big) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim\big(Nu(F)\big) = 1$$

Queremos una base de la imagen. ¿En qué espacio vectorial está la imagen? En P_1.

Recordemos que los transformados de una base (cualquiera) del dominio, generan la imagen de la transformación lineal:

$$F\big((1,0)\big) = 2 - x$$

$$F\big((0,1)\big) = 2 - x$$

Entonces ¿Cuál es una base de la imagen de la transformación lineal?

$$B_{Im} = \{2 - x\}$$

Veamos que la imagen no depende de la base del dominio que elijamos. Por ejemplo tomemos la base B:

$$F\big((1,0)\big) = 2 - x$$

$$F\big((1,1)\big) = 4 - 2x$$

$\{ 2 - x , 4 - 2x \}$ generan $Im(F)$

$$B_{Im} = \{2 - x\}$$

Ítem e

No es necesario buscar la fórmula para obtener la imagen. Las columnas en la matriz nos dan las coordenadas en la base B' de los transformados de una base del dominio:

$$M(F)_{BB'} = ([F(v_1)]_{B'} \quad [F(v_2)]_{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$F\big((1,0)\big) = 1.1 + 1.(1 - x) = 2 - x$$

$$F(1,1) = 2.1 + 2(1 - x) = 4 - 2x$$

Luego:

$$Im(F) = gen\{2 - x , 4 - 2x\}$$

Cómo $4 - 2x$ es combinación lineal de $2 - x$ podemos quedarnos con la siguiente base:

$$B_{Im(F)} = \{2 - x\}$$

Ítem f

¿Y para el núcleo sin la fórmula? Queremos hallar los $v \in \mathbb{R}^2$ tales que al aplicarles la transformación den por resultado el polinomio nulo:

$$F(v) = 0_{P_1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M(F)_{BB'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{[v]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{[0_{P_1}]_{B'}} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Éstas son las coordenadas en la base B de una base del núcleo:

$$v = 2.(1,0) - (1,1) = \underbrace{(1,-1)}_{B_{Nu}}$$

Ejemplo 5

Vamos a retomar el ejercicio 8, ítem a, de página 40 que decía:

Halle la expresión analítica de la siguiente transformación:

Simetría respecto de la recta $y = 3x$, $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

En un ejemplo anterior habíamos obtenido la fórmula de la transformación lineal:

$$T\big((x,y)\big) = \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\,; \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)$$

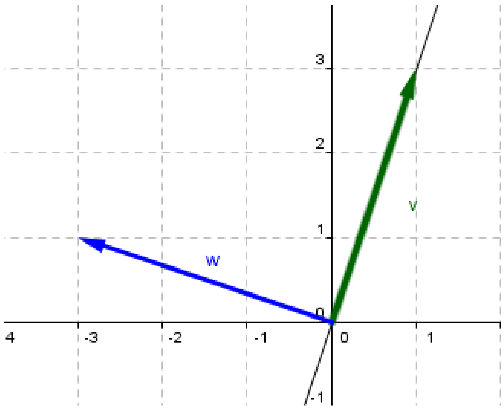
La matriz estándar (referida a la base canónica de$\mathbb{R}^2$), $M(T)_{EE}$ es la siguiente:

$$M(T) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Observación: cuando se trata de las bases canónicas para simplificar la notación se escribe $M(T)$ en lugar de $M(T)_{EE}$.

Veamos si podemos hallar una representación matricial más sencilla para esta simetría.

¿Qué significa una simetría respecto de la recta $y = 3x$? Recordemos que el transformado de un vector que esté sobre la recta es el mismo vector, y el transformado de un vector perpendicular a la recta es su opuesto.



Armemos una base de $\mathbb{R}^2$ formada por un vector v sobre la recta ($y = 3x$) y un vector w perpendicular a dicha recta. Por ejemplo:

$$B = \{(1,3), (-3,1)\}$$

$$T\big((1,3)\big) = (1,3) = 1.(1,3) + 0(-3,1) \;\Rightarrow\; [(1,3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\big((-3,1)\big) = (3,-1) = 0.(1,3) + (-1).(-3,1) \Rightarrow [(-3,1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la matriz asociada a la transformación lineal en esta nueva base?

$$M(T)_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eligiendo una base conveniente, pudimos caracterizar la simetría mediante una matriz diagonal. Continuaremos desarrollando este tema en la próxima unidad (autovalores y autovectores).

EPL 3

Dada la transformación lineal F de $\mathbb{R}^3$ a P_1 cuya matriz asociada es:

$$M(F)_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $B = \{(1,0,0)\,,(1,1,0)\,,(1,0,1)\}$ y $E = \{\,1\,,t\,\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y P_1 respectivamente.

a) Hallar una base del núcleo de F. A partir de la base obtenida, ¿es posible afirmar que F es *sobreyectiva*? ¿Por qué?

b) Hallar <u>todos</u> los $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $F(v) = -1 + t$.

El rango es igual a la dimensión de la imagen

Recordemos que:

1. $M(T)_{BB'} = ([T(v_1)]_{B'}\ ,\dots,[T(v_n)]_{B'})$
2. $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ generan $Im(T)$

Para obtener una base de $Im(T)$ tenemos que determinar cuántos son LI. Se puede demostrar que en $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ habrá tantos vectores LI como columnas LI en la matriz.

Dado que el rango de una matriz es el número de columnas LI, entonces el rango de la matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases B y B' es igual a la dimensión de la imagen de la trasformación lineal.

$$\boldsymbol{rango\big(M(T)_{BB'}\big) = \dim\big(Im(T)\big)}$$

Observación: La dimensión de la imagen no depende de las bases elegidas, por esto el rango tampoco depende de ellas.

EPL 4

Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz estándar es:

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

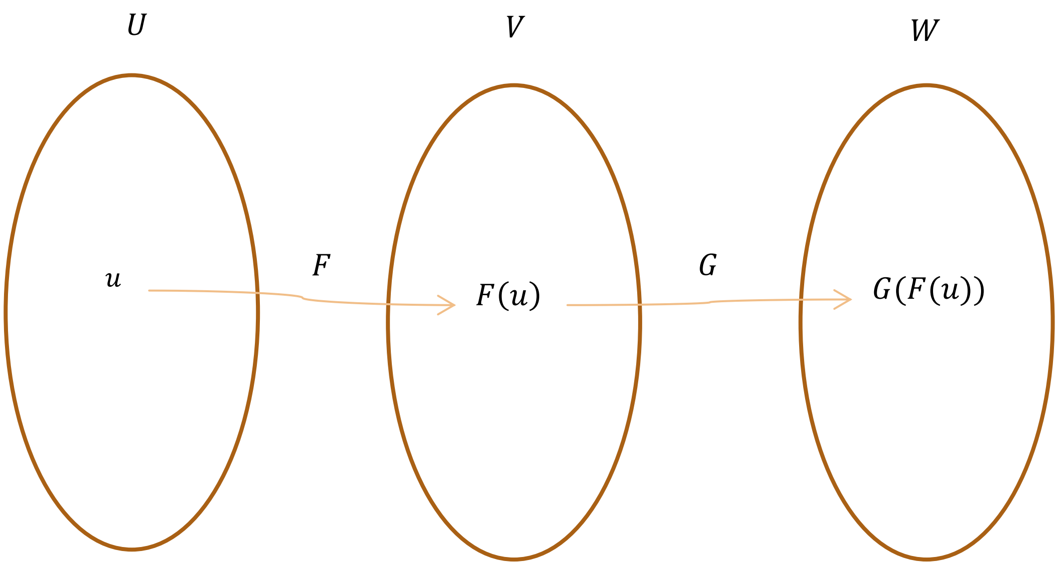
a. Probar que T es inyectiva (monomorfismo) para todo a perteneciente a los reales.
b. Hallar el valor de a tal que $(-1,-1,\ 4)$ pertenezca a la imagen de la transformación.

Composición e inversa de transformaciones lineales

Composición de transformaciones lineales

Sean F y G dos transformaciones lineales tales que:

$$F: U \to V \quad ; \quad G: V \to W$$



$$\exists GoF: U \to W \mid GoF(u) = G\big(F(u)\big)\ \forall u \in U$$

Propiedad: la composición de transformaciones lineales, es una transformación lineal.

Ejemplo

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid F\big((x,y)\big) = (x-y, x+y, 2x)\ \ TL$$

$$G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid G\big((x,y,z)\big) = (x-z, y+z)\ \ TL$$

Hallar la fórmula de GoF y FoG, indicando en cada caso dominio y codominio.

$$GoF: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ GoF\big((x,y)\big) = G\big((x-y, x+y, 2x)\big)$$

$$= (x-y-(2x)\ ,\ \ x+y+2x) = (-x-y, 3x+y)$$

$$FoG: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ \ , FoG\big((x,y,z)\big) = F\big((x-z, y+z)\big)$$

$$= (x-z-(y+z), x-z+(y+z), 2x-2z) = (x-y-2z, x+y, 2x-2z)$$

¿Con qué operación de matrices se relaciona la composición de transformaciones lineales?

Busquemos las matrices estándar:

$$M(F) \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \qquad M(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(G) \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recuerden que cuando no colocamos subíndices, significa que es la matriz estándar, referida a las bases canónicas.

Calculemos los productos:

$$M(F).M(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y

$$M(G).M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos la matriz de GoF y la matriz de FoG a partir de las respectivas fórmulas:

$$M(FoG) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M(GoF) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces hemos comprobado, con un caso particular, que:

$$\boldsymbol{M(GoF) = M(G).M(F)}$$

$$\boldsymbol{M(FoG) = M(F).M(G)}$$

Es decir que *la composición de transformaciones lineales se expresa matricialmente a través de un producto de matrices.*

Matriz asociada a la composición de transformaciones lineales

Sean F y G dos transformaciones lineales tales que:

$$F: U \to V \quad ; \quad G: V \to W$$

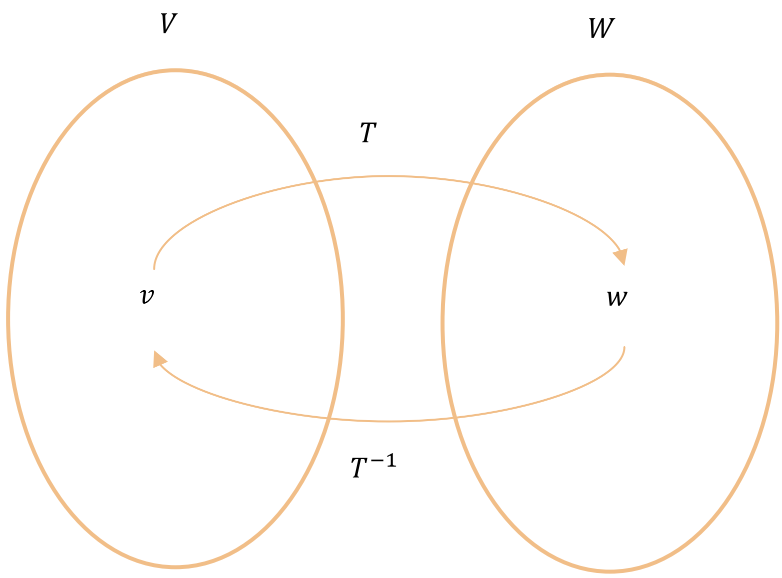
Y sean B_1, B_2, B_3 bases de U, V y W respectivamente, entonces se puede demostrar que:

$$M(GoF)_{B_1 B_3} = M(G)_{B_2 B_3}.M(F)_{B_1 B_2}$$

Inversa de una transformación lineal

Sea $T: V \to W$ una **transformación lineal biyectiva** (isomorfismo), entonces existe la transformación inversa:

$$T^{-1}: W \to V \quad \text{tal que} \quad T^{-1}(w) = v \Leftrightarrow T(v) = w$$



T^{-1} también es una transformación lineal biyectiva:

$$T^{-1}oT = Id_V$$

$$ToT^{-1} = Id_w$$

Observación: Para que exista una transformación lineal biyectiva entre dos espacios vectoriales, éstos deben tener la misma dimensión. ¿Por qué?

Ejemplo

Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1$, $T\big((a,b)\big) = a - b + 2ax$

¿Cuál es el núcleo de T?

$$a - b + 2ax = 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0 = b$$

$$Nu(T) = \{(0,0)\}$$

¿Cuál es la imagen de T?

$$T\big((1,0)\big) = 2x + 1$$

$$T\big((0,1)\big) = -1 + 0x$$

Estos dos polinomios ¿son LI o LD? Son LI, y por lo tanto la dimensión de la imagen es 2.

La imagen 'vive' en $\mathbb{P}_1$, entonces:

$$Im(T) = \mathbb{P}_1$$

Comprobamos que T es un isomorfismo, entonces existe la transformación lineal inversa

$$T^{-1}: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^2$$

$$T\big((1,0)\big) = 2x + 1$$

$$T\big((0,1)\big) = -1 + 0x$$

Entonces:

$$T^{-1}(2x + 1) = (1,0)$$

$$T^{-1}(-1 + 0x) = (0,1)$$

¿Está bien definida T^{-1}? Sí, porque $\{2x + 1, -1\}$ es una base de P_1 (TFTL).

Matriz de la transformación inversa

Sea $T: V \to W$ isomorfismo, $\dim(V) = \dim(W) = n$, y $M(T)_{BB'} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz asociada a T respecto de las bases B y B'.

Recordemos que *el rango de la matriz asociada es igual a la dimensión de la imagen*.

Como T es isomorfismo, $Im\ (T) = W$ y por lo tanto: $(rg(M(T)_{BB'}) = n$

Entonces $M(T)_{BB'}$ es inversible y su inversa es la matriz de T^{-1} respecto de las bases B' y B:

$$(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{T})_{\boldsymbol{BB'}})^{-1} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{T}^{-1})_{\boldsymbol{B'B}}$$

En el siguiente esquema se puede observar cómo operan las matrices $M(T)_{BB'}$ y $M(T^{-1})_{B'B}$:

$$[v]_B \quad \underset{\displaystyle M(T^{-1})_{B'B}}{\overset{\displaystyle M(T)_{BB'}}{\rightleftarrows}} \quad [T(v)]_{B'}$$

Caso particular: $V = W = \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{T})_{\boldsymbol{EE}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{T}^{-1})_{\boldsymbol{EE}}$$

Ejemplo

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una TL, tal que $T(x,y,z) = (x+y, x-z, z)$, hallar la fórmula de T^{-1}.

Resolución

Construyamos la matriz asociada a la TL en las bases canónicas:

$$M(T) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que A^{-1} será la matriz asociada a la TL inversa:

$$M(T^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y a partir de la matriz estándar de la TL inversa podemos hallar la fórmula de la TL inversa:

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;,\; T^{-1}\big((x,y,z)\big) = (y+z, x-y-z, z)$$

EPL 5

Dadas las transformaciones lineales:

F de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (x-y\,, y+z)$ y G de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $G(a,b) = (a+b\,, 0, 2a + kb)$

a) Determinar todos los valores de k para los cuales $F \circ G$ es biyectiva (isomorfismo).

b) Para $k = 1$, obtener $(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G})^{-1}(1,0)$.

Matriz de cambio de base

Queremos construir una matriz que nos permita cambiar las coordenadas de un vector en una base por las coordenadas del mismo vector en otra base.

Consideremos en un espacio vectorial V la función identidad, que transforma cada vector en sí mismo. Dejamos a cargo del lector demostrar que es una T.L.

$$Id: V \to V \mid Id(v) = v$$

Observación: Si $V = \mathbb{R}$, la función identidad es $f(x) = x$.

Tomemos un par de bases del mismo espacio vectorial V:

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Construyamos ahora la matriz asociada a la transformación lineal identidad:

$$M(Id)_{BB'} = ([v_1]_{B'}, \dots, [v_n]_{B'}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Recordemos que:

$$M(F)_{BB'}\,[v]_B = [F(v)]_{B'}$$

En el caso particular de la transformación identidad, teniendo en cuenta que $Id(v) = v$, resulta:

$$M(Id)_{BB'}.[v]_B = [v]_{B'}$$

¿Qué efecto produce esta matriz? Cambia las coordenadas, o sea el sistema de referencia. No transforma el vector pues $Id(v) = v$.

$M(Id)_{BB'}$ se denomina matriz de cambio de base de B a B'.

¿Qué rango tiene esta matriz? Tiene rango n ya que sus columnas son LI por ser coordenadas de vectores de una base de V.

Por ser $M(Id)_{BB'} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de rango n, es inversible.

¿Qué efecto produce la matriz inversa? Nos permite volver a la primera base, como lo indica el siguiente esquema:

$$[v]_B \underset{\underset{M(Id)_{B'B}}{\longleftarrow}}{\overset{M(Id)_{BB'}}{\longrightarrow}} [v]_{B'}$$

Si $P = M(Id)_{BB'}$ entonces $P^{-1} = M(Id)_{B'B}$.

Ejemplo 1

Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$B_1 = \{(1,0),(1,3)\}$$

$$B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$$

$$E = \{(1,0),(0,1)\}$$

a) Hallar $M(Id)_{B_1B_2}$
b) Hallar $M(Id)_{B_1E}$
c) Hallar $M(Id)_{EB_1}$

Resolución

Ítem a

Se construye la matriz de cambio de base buscando las coordenadas en la base B_2 de los vectores de la base B_1.

$$M(Id)_{B_1B_2} = \left([v_1]_{B_2} \quad [v_2]_{B_2}\right)$$

Busquemos las coordenadas de (1,0) en la base B_2:

$$(1,0) = \alpha.(0,1) + \beta.(1,1)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \ \wedge \beta = 1$$

$$\Rightarrow [(1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos las coordenadas de (1,3) en la base B_2:

$$(1,3) = \alpha.(0,1) + \beta.(1,1)$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \ \wedge \ \beta = 1$$

$$\Rightarrow [(1,3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M(Id)_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ítem b

Se construye la matriz de cambio de base buscando las coordenadas en la base E de los vectores de la base B_1.

$$M(Id)_{B_1E} = ([v_1]_E \quad [v_2]_E)$$

Pero las coordenadas en base canónicas son las mismas componentes del vector. Podemos verificarlo para (1,0):

$$(1,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0$$

Entonces las coordenadas de $(1{,}0)$ en la base canónica son justamente $\binom{1}{0}$:

$$[(1{,}0)]_E = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Para el vector $(1{,}3)$ podemos escribir:

$$[(1{,}3)]_E = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Así que la matriz de cambio de base resulta:

$$M(Id)_{B_1E} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$$

Que podemos decir que se construyó ubicando a los vectores de la base $B_1 = \{(1{,}0),(1{,}3)\}$ como columnas de la matriz.

Ítem c

Se pide que hallemos $M(Id)_{EB_1}$, pero según hemos visto esta matriz es la inversa de $M(Id)_{B_1E}$:

$$M(Id)_{EB_1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -3\end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

a. Si $[u]_{B_1} = \binom{-1}{4}$ calcular $[u]_{B_2}$
b. Si $[v]_{B_2} = \binom{3}{5}$ calcular $[v]_{B_1}$
c. Si $B_1 = \{(1{,}3),(0{,}4)\}$, obtener la base B_2. ¿Es única?

Resolución

Ítem a

Según la propiedad de la matriz de cambio de base:

$$P.[u]_{B_1} = [u]_{B_2} \Rightarrow [u]_{B_2} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$$

¿Podemos determinar cuál es el vector u? No, porque no tenemos información sobre las bases.

Ítem b

Ahora es en sentido contrario:

$$[v]_{B_2} = \binom{3}{5} \rightarrow [v]_{B1} \ =?$$

$$P.[v]_{B_1} = [v]_{\mathrm{B}_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.[v]_B = \binom{3}{5} \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Ítem c

En este punto nos dan la base B_1:

$$B_1 = \{(1,3),(0,4)\}$$

¿Puede determinarse B_2?

Sabemos que:

$$Id\big((1,3)\big) = (1,3)$$

$$Id\big((0,4)\big) = (0,4)$$

$$v_1 = (1,3) \ \ v_2 = (0,4)$$

$$P = M(Id)_{B_1\mathrm{B}_2} = \big([v_1]_{\mathrm{B}_2} \quad [v_2]_{\mathrm{B}_2}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Queremos obtener:

$$B_2 = \{w_1\,, w_2\}$$

$$(1,3) = 1.w_1 + 0.w_2 \Rightarrow w_1 = (1,3)$$

$$(0,4) = 1.w_1 + (-3).w_2 \Rightarrow w_2 = \frac{(0,4)-(1,3)}{-3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Quiere decir que si tenemos como dato la matriz de cambio de base, podemos determinar la base B_2 a partir de la base B_1 y viceversa.

Cómo afecta un cambio de base a la matriz asociada a una TL

En este apartado nos interesa estudiar cuál es la relación entre dos matrices asociadas a una misma transformación lineal, pero que están expresadas en bases diferentes.

Sean:

- $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal

- B_1, B_3 bases de V
- B_2, B_4 bases de W
- Id_V la transformación lineal identidad en el espacio vectorial V
- Id_W la transformación lineal identidad en el espacio vectorial W

¿Qué relación existe entre $M(T)_{B_1B_2}$ y $M(T)_{B_3B_4}$? ¿Cómo se podría a partir de una de ellas calcular la otra?

Por las propiedades de las matrices asociadas a una TL, puede afirmarse que:

$$M(T)_{B_1B_2}[v]_{B_1} = [T(v)]_{B_2}$$

$$M(T)_{B_3B_4}[v]_{B_3} = [T(v)]_{B_4}$$

$$M(Id_V)_{B_3B_1}[v]_{B_3} = [v]_{B_1}$$

$$M(Id_W)_{B_2B_4}[T(v)]_{B_2} = [T(v)]_{B_4}$$

Si el lector leyó cuidadosamente las igualdades anteriores, estará convencido de que son válidas (si no está convencido, sugerimos consultar por el foro). Las relaciones enunciadas pueden verse convenientemente en el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{B_1}} \arrow[r, "M(T)_{B_1B_2}"] & {[T(v)]_{B_2}} \arrow[d, "M(Id_W)_{B_2B_4}"] \\
{[v]_{B_3}} \arrow[u, "M(Id_V)_{B_3B_1}"] \arrow[r, "M(T)_{B_3B_4}"'] & {[T(v)]_{B_4}}
\end{tikzcd}$$

De todo esto es posible deducir que:

$$M(T)_{B_3B_4} = M(Id_W)_{B_2B_4}.M(T)_{B_1B_2}.M(Id_V)_{B_3B_1}$$

Caso particular de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$

Nos interesa especialmente el caso de las TL $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y la relación entre la matriz estándar y otra matriz asociada $M(T)_{BB}$, con B base de $\mathbb{R}^n$. Volvamos a construir el esquema para este caso particular:

$$\begin{tikzcd}
{[v]_E} \arrow[r, "M(T)_{EE}"] & {[T(v)]_E} \arrow[d, "P^{-1} = M(Id)_{EB}"] \\
{[v]_B} \arrow[u, "P = M(Id)_{BE}"] \arrow[r, "M(T)_{BB}"'] & {[T(v)]_B}
\end{tikzcd}$$

Habíamos visto que:

$$M(T)_{B_3B_4} = M(Id)_{B_2B_4}.M(T)_{B_1B_2}.M(Id)_{B_3B_1}$$

En este caso particular la expresión queda:

$$\Rightarrow M(T)_{BB} = M(Id)_{EB}.M(T)_{EE}.M(Id)_{BE}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{M(T)_{BB} = P^{-1}M(T)_{EE}\,P} \qquad \text{donde} \qquad P = M(Id)_{BE}$$

Ejemplo

$$T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$M(T)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,1,),(3,-2)\}$$

Queremos encontrar $M(T)_{BB}$.

Calculamos la matriz de cambio de base:

$$P = M(Id)_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Buscamos su inversa:

$$P^{-1} = M(Id)_{EB} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces resulta:

$$M(T)_{BB} = P^{-1}.M(T)_{EE}.P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observemos que en esta base B, la matriz asociada es diagonal.

Dada una TL en $\mathbb{R}^n$, ¿cuándo es posible hallar una base B de modo que la matriz asociada en esa base resulte diagonal? La respuesta la encontraremos en la próxima unidad.

EPL 6

a) Eligiendo una base adecuada, definir una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que represente la simetría (reflexión) respecto del plano $\pi:\ x - z = 0$.

b) Hallar si es posible, una base B de $\mathbb{R}^3$ de modo que la matriz asociada a T sea:

$$M(T)_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, ¿cuáles son los transformados de los vectores de B? (Tener en cuenta cómo se construye $M(T)_{BB}$).

d) Obtener la matriz de T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.