ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 9

NÚMEROS COMPLEJOS

UTN.BA

Isabel Pustilnik
Federico Gómez

ÍNDICE

Definición de número complejo

Un número complejo z se define como un par ordenado de números reales:

$$z = (a, b) \quad con \;\; a, b \in \mathbb{R}$$

donde el primer elemento del par ordenado se llama *parte real* del número complejo, y el segundo elemento se llama *parte imaginaria*:

$$Re(z) = a$$

$$Im(z) = b$$

En los números complejos se definen las siguientes operaciones:

$$(a, b) \; + \; (c, d) \; = \; (a \; + \; c \,, b \; + \; d)$$

$$(a, b) \,.\, (c, d) \; = \; (ac \; - \; bd \,, ad \; + \; bc)$$

Con estas operaciones, puede demostrarse que el conjunto de los números complejos tiene las mismas propiedades que los reales con la suma y el producto. No nos extenderemos desarrollando esta cuestión algebraica porque en la práctica lo usual es operar con otras expresiones de los números complejos, como veremos a continuación.

Podemos identificar de manera natural los complejos de parte imaginaria nula con los números reales:

$$(a, 0) \in \mathbb{C} \; \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$$

Por otra parte, los números de parte real nula: $z = (0, b)$ se denominan *imaginarios puros*. Se define la unidad imaginaria:

$$\boldsymbol{i = (0, 1)} \quad \boldsymbol{unidad\ imaginaria}$$

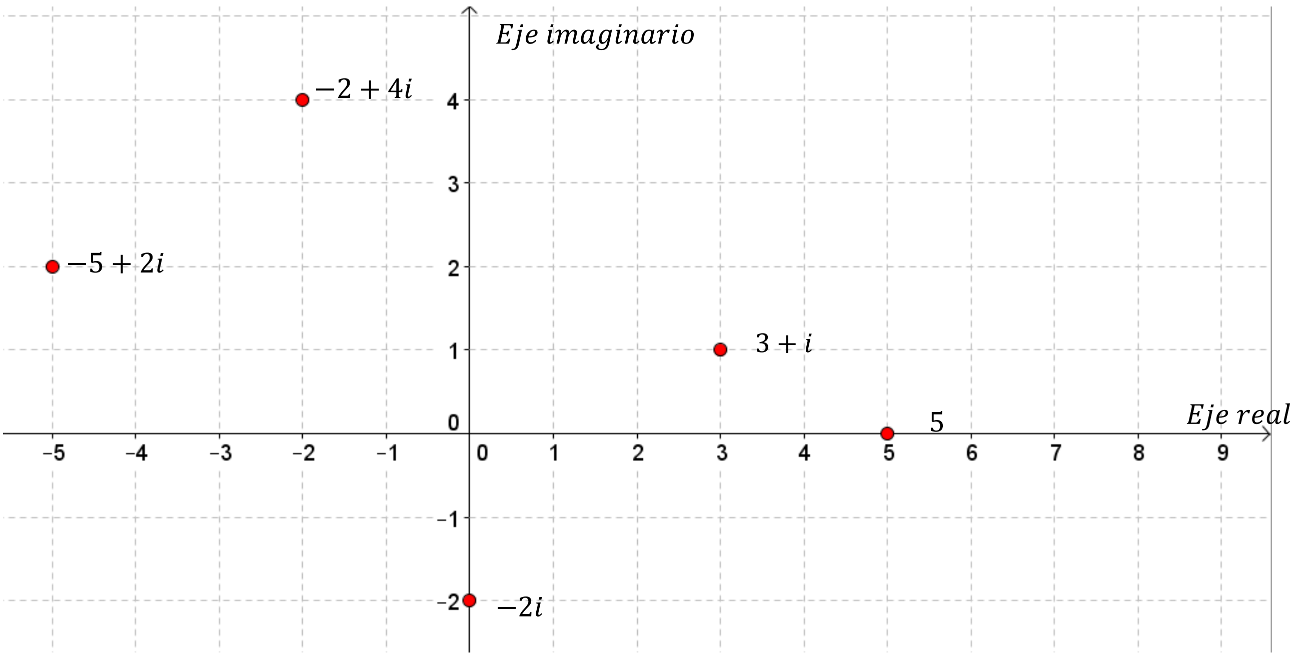
Podemos entonces deducir otra forma de expresar un número complejo:

$$z = (a, b) = a\,\underbrace{(1{,}0)}_{1} + b\,\underbrace{(0{,}1)}_{i}$$

$$\boldsymbol{z = a + bi} \qquad \boldsymbol{forma\ binómica}$$

Observación: en algunos textos de Física y de Ingeniería la unidad imaginaria se designa como j , para no confundir con la i que suele indicar la intensidad de corriente eléctrica.

Dado que hemos definido un número complejo como un par ordenado de números reales, es natural interpretarlo como un punto del plano. En el eje de abscisas (eje real) ubicaremos los complejos de parte imaginaria nula. Y en el eje de ordenadas (eje imaginario) ubicaremos los imaginarios puros:



Operaciones en forma binómica

Suma y resta

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Análogamente: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación

$$z_1 . z_2 = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bic + bdi^2 [1]$$

¿Cuánto vale i^2?

De acuerdo con la multiplicación definida:

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc) [2]$$

Para $i = (0, 1)$ resulta:

$i^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$ que identificamos con el número real (-1).

En resumen:

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

Reemplazando en $[\mathbf{1}]$ resulta:

$$z_1 \,.\, z_2 \;= (\,ac - bd) + i(ad + bc)$$

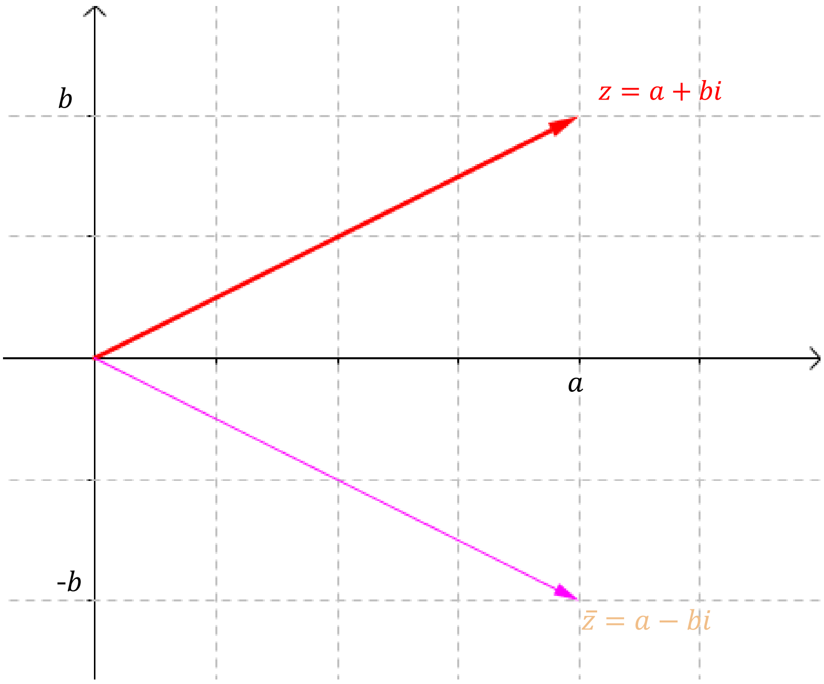
Pueden verificar que es coherente con la definición [2].

Conjugado de un número complejo

El conjugado de $z = a + bi$, se define así:

$$\bar{z} = a - bi$$

Observamos que z y $\bar{z}$ son simétricos respecto del eje real, como muestra la siguiente figura:



Propiedades:

1) $z \;+\; \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = \;2\,Re(z)$

2) $z \;-\; \bar{z} \;= a + bi - (a - bi) = 2bi = \;2i.Im(z)$(recordar que $Im(z) \in \mathbb{R}$)

3) $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bia - b^2 i^2 = (a^2 + b^2) \in \mathbb{R} > 0\;\; para\; todo\;\; z \neq 0$

División en complejos

Esta última propiedad nos permite calcular el cociente entre dos números complejos.

Sean $z_1 = a + bi \;\;, z_2 = c + di$

Para hallarz_1/z_2multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Entonces:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{\underbrace{c^2+d^2}_{\mathbb{R}>0}}$$

Ejemplos

Sean los números complejos:

$$z_1 = 2+3i \;\; ; \quad z_2 = 1-i \;\; ; \quad z_3 = -3+i \;\; ; \;\; z_4 = 1-i$$

Calcular:

a. $z_1 - 2z_2$

b. $z_1 . z_3$

c. ${z_2}^2 + z_3$

d. $\dfrac{z_4}{z_3}$

e. $\dfrac{z_1}{z_4}$

Resolución

Ítem a

$$z_1 - 2z_2 = (2+3i) - 2(1-i) = 2-2+i(3+2) = 5i$$

Ítem b

$$z_1 . z_3 = (2+3i)(-3+i) = -6+2i-9i+3i^2 = -9-7i$$

Ítem c

$${z_2}^2 + z_3 = (1-i)^2 + (-3+i) = 1-2i+i^2-3+i = -3-i$$

Ítem d

$$\frac{z_4}{z_3} = \frac{1-i}{-3+i} = \frac{1-i}{-3+i} \cdot \frac{(-3-i)}{(-3-i)} = \frac{-3+3i-i+i^2}{9-i^2} = \frac{-4+2i}{10} = -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

Ítem e

$$\frac{z_1}{z_4} = \frac{2+3i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

¡Hemos encontrado un número cuyo cuadrado es (-1)!

¿Cuánto da $(-i)^2$?

A partir de ahora, podremos resolver ecuaciones como ésta:

$$x^2 + 1 = 0$$

Esta ecuación tan sencilla, no tiene solución en $\mathbb{R}$, pero sí tiene solución en $\mathbb{C}$:

$$S_{\mathbb{C}} = \{\, i\,, -i \,\}$$

Generalizando, la ecuación cuadrática

$$x^2 + a = 0 \quad , con \;\; a > 0$$

no tiene solución en $\mathbb{R}$ pero tiene dos soluciones en $\mathbb{C}$: $x_{1,2} = \pm\, i\sqrt{a}$

Ejemplo

Resolver las ecuaciones:

a) $x^2 + 5 \; = \; 0$

b) $x^2 - 4x + 5 = 0$

Resolución

Ítem a

$$x^2 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5}\, i \quad \vee \quad x = -\sqrt{5}\, i$$

Ítem b

Podemos usar la fórmula resolvente:

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4.1.5}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$\Rightarrow \quad x = 2 + i \;\; \vee \;\; x = 2 - i$$

Potencias de i

Las potencias de la unidad imaginaria tienen un comportamiento cíclico, como veremos a continuación:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2.i = -i$$

$$i^4 = i^3.i = 1$$

$$i^5 = i^4.i = i$$

Y así sucesivamente.

¿Cómo podemos determinar cualquier potencia de i , por ejemplo i^{514} ?
Dividiendo el exponente por 4, se obtiene: $514 = 128.4 + 2$

Entonces resulta:

$$i^{514} = i^{128.4+2} = \underbrace{(i^4)}_{1}{}^{128}.i^2 = i^2 = -1$$

O sea que: $i^{514} = i^2$, siendo 2 el resto de dividir 514 por 4.

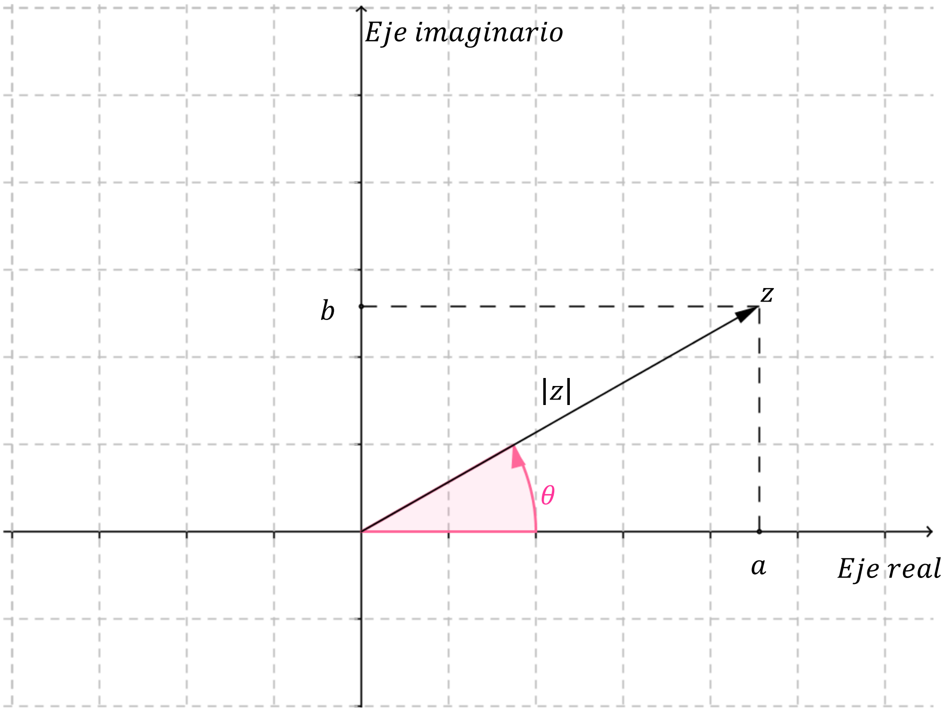
En resumen:

$i^n = i^r$, siendo r el resto de la división de n por 4 ($n \in \mathbb{N}$)

Módulo y argumento de un número complejo

Sea $z = a + bi \quad (z \neq 0)$

Habíamos visto que un número complejo puede representarse como un punto del plano. Ese punto tiene asociado un vector que queda unívocamente determinado por su *módulo* $|z|$ y su *argumento* θ , tal como muestra la figura:



El módulo se calcula como el módulo de un vector en $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se define $\theta = \arg(z)$ como el ángulo entre el semieje positivo de abscisas y el vector. El argumento puede determinarse, <u>teniendo en cuenta los signos de a y b</u> con:

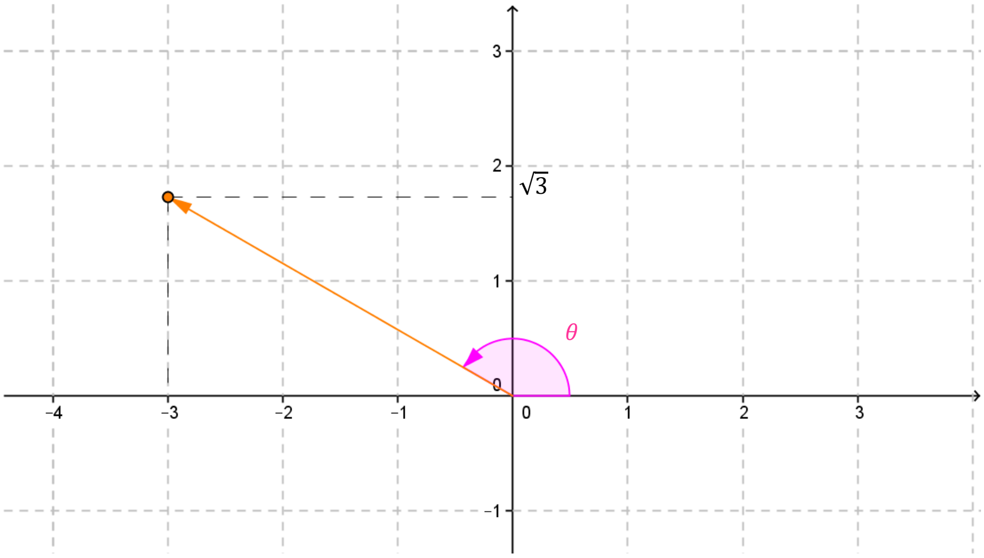
$$\boxed{tg(\theta) = \frac{b}{a}\ ,\ \ \mathrm{a} \neq 0}$$

Ejemplo 1

Sea $z = -3 + \sqrt{3}i$, hallemos su módulo y su argumento:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12}$$

Para hallar el argumento es útil hacer una gráfica aproximada de z:



A partir de esta gráfica observamos que z pertenece al segundo cuadrante.

Para hallar θ resolvemos la siguiente ecuación trigonométrica:

$$tg(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como se ha estudiado en el seminario de ingreso, existen infinitos ángulos tales que su tangente es $-\sqrt{3}/3$. Los cuadrantes en los cuales la tangente es negativa son el segundo y el cuarto.

Usando calculadora o la tabla de senos, cosenos y tangentes de ángulos notables es posible hallar una primera solución:

Ángulo en grados	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Ángulo en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno del ángulo	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno del ángulo	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente del ángulo	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

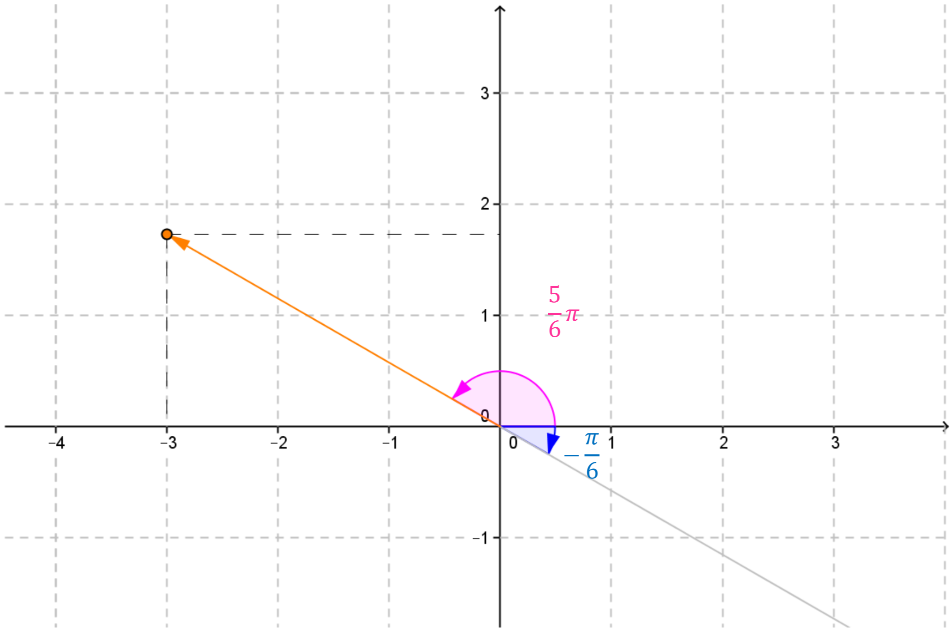
De la tabla vemos que $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, luego $tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Con calculadora usando la función arcotangente se obtiene:

$$-0{,}523598776 \cong -\frac{\pi}{6} = \theta$$

Hemos hallado una solución en el cuarto cuadrante; para obtener la solución en el segundo cuadrante, sumamos π como muestra la siguiente gráfica:

$$-\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$$



El conjunto de las infinitas soluciones de la ecuación $tg(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ es:

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; \vee \;\; \theta = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \;\;,\;\; k \in \mathbb{Z}$$

Pero, de acuerdo con los signos de a y b, sabemos que las soluciones del cuarto cuadrante no describen a z.

Entonces resulta:

$$\arg(z) = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \;\;,\;\; k \in \mathbb{Z}$$

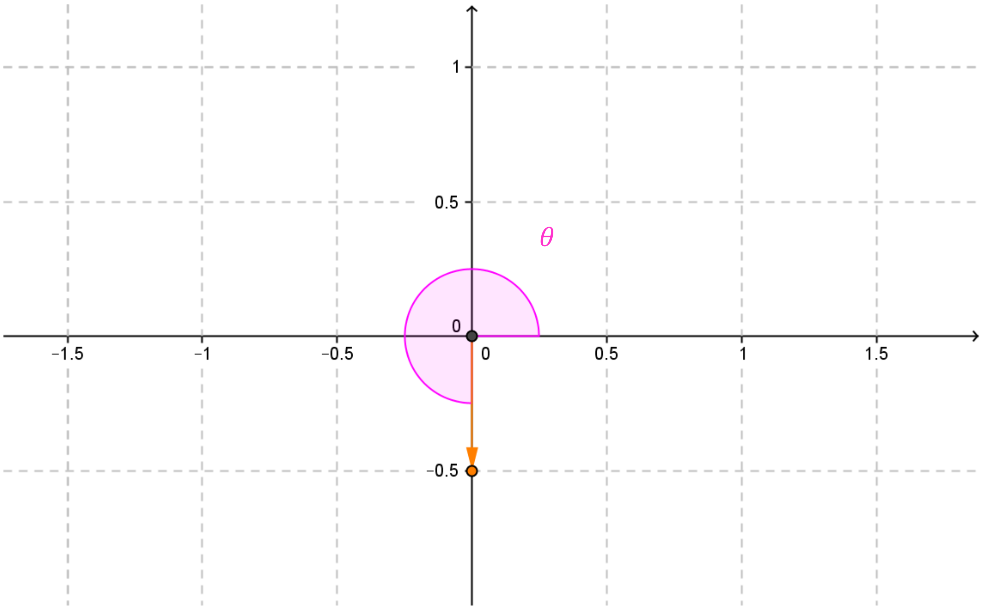
De estos infinitos argumentos ***se llama argumento principal de z, y se anota $Arg(z)$, al único comprendido en el intervalo $[0, 2\pi)$.***

Luego el argumento principal de z es:

$$Arg(z) = \frac{5}{6}\pi$$

Ejemplo 2

Sea $z = -0{,}5i$. En este caso $a = 0$, entonces θ no puede determinarse con la fórmula$tg(\theta) = b/a$. Si hacemos un gráfico:



Vemos que el argumento principal de z es $3\pi/2$.

Generalizando:

Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, z es imaginario puro y su argumento dependerá del signo de b:

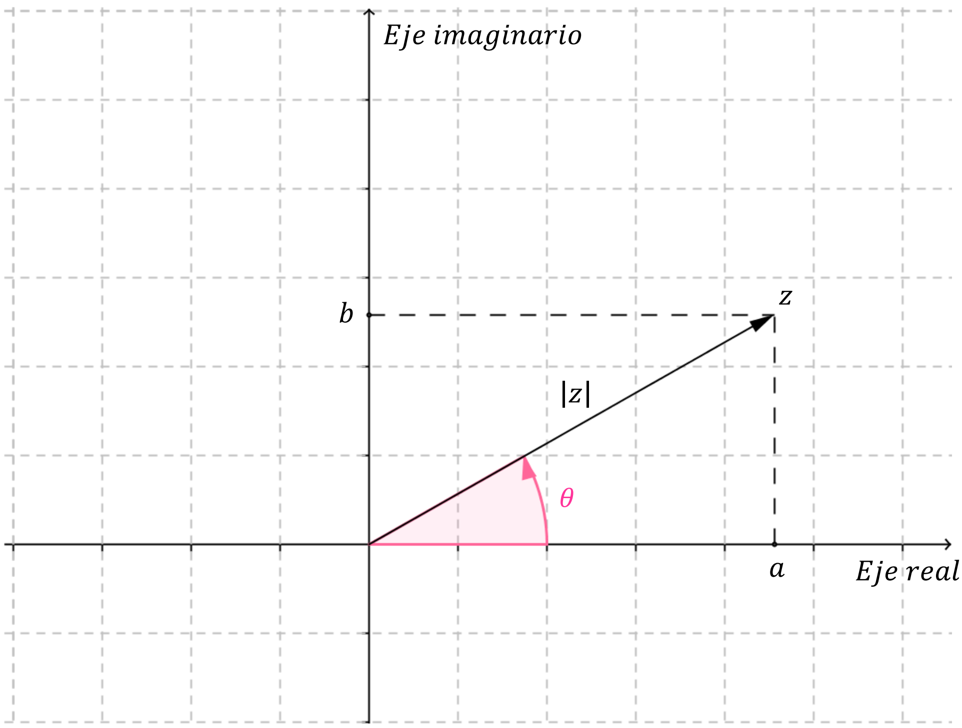
$$a = 0 \;\wedge\; b > 0 \;\;\Longrightarrow\;\; Arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

$$a = 0 \;\wedge\; b < 0 \;\;\Longrightarrow\;\; Arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

Observación: Si $z = 0$, $|z| = 0$ pero el argumento no está definido.

Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Consideremos la siguiente figura:



Se deduce que:

$$a = |z|\cos(\theta) \quad , \quad b = |z|\; sen(\theta)$$

Entonces resulta:

$$z = a + bi \;=\; |z|\cos(\theta) + i\;|z|\;sen(\theta)$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} \qquad \textbf{\textit{Forma trigonométrica o polar}}$$

En algunos textos se usa una abreviatura para la forma trigonométrica:

$$\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) \;=\; cis(\theta)$$

$$z = |z|\;cis(\theta)$$

Ejemplo

Expresar los siguientes números complejos en forma trigonométrica:

1. $z_1 = -3 + \sqrt{3}i$
2. $z_2 = -2$
3. $z_3 = -2 - 2i$
4. $z_4 = -1{,}5i$

Resolución

Debemos buscar el módulo y argumento de cada uno de los números complejos.

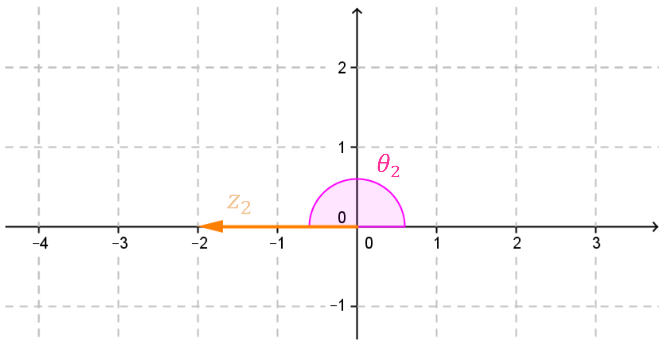
Para z_1 ya habíamos averiguado módulo y argumento, luego su forma trigonométrica es:

$$z_1 = \sqrt{12}.\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i.sen\frac{5}{6}\pi\right)$$

Para z_2 calculemos el módulo:

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

Para hallar el argumento, es muy útil pensar en la gráfica de $z_2 = -2$:



z_2 está sobre el semieje negativo real, luego el argumento principal es:

$$Arg(z_2) = \pi$$

Entonces:

$$z_2 = 2.(\cos\pi + i.\operatorname{sen}\pi)$$

Observación: Para $z_2 = -2$, resulta $tg(\theta_2) = 0$. La función arcotangente devuelve $\theta_2 = 0$ pero este argumento no corresponde porque z_2 está sobre el semieje real negativo. Por eso, para hallar el argumento hay que <u>tener presente la ubicación del complejo en el plano</u>.

Para $z_3 = -2 - 2i$, hallamos el módulo:

$$|z_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Sabemos por los signos de a y b que está en el tercer cuadrante y que:

$$tg(\theta_3) = 1$$

Luego el argumento principal es:

$$Arg(z_3) = \frac{5}{4}\pi$$

Entonces:

$$z_3 = \sqrt{8}.\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i.sen\frac{5}{4}\pi\right)$$

Forma exponencial de un número complejo

Existe otra manera de expresar los números complejos conociendo su módulo y su argumento, llamada *forma exponencial*. Esta expresión se basa en la siguiente fórmula:

Fórmula de Euler

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que: $\boldsymbol{e^{ix} = \cos(x) + i\, sen(x)}$

Sea $\theta = \arg(z)$ $\boldsymbol{expresado\ en\ radianes}$. La expresión trigonométrica de z es:

$$z = |z|\ (\cos\theta + i\ sen\theta)$$

Aplicando la fórmula de Euler, resulta:

$$\boldsymbol{z = |z|e^{i\theta}} \qquad \boldsymbol{Forma\ exponencial}$$

Ejemplos

$$z_1 = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ sen\frac{\pi}{2}\right) = 3\ e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\ sen\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Operaciones en forma exponencial

Puede demostrarse que la exponencial compleja verifica las propiedades básicas de la potenciación, lo cual permite resolver en forma sencilla las operaciones con números complejos.

Si $z_1 = |z_1|e^{i\,\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\,\theta_2}$, resulta:

$$z_1\,z_2 = |z_1|e^{i\,\theta_1}|z_2|\ e^{i\,\theta_2}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{z_1\,z_2 = |z_1||z_2|\ e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}}$$

O sea: para multiplicar números complejos, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Análogamente, para dividir números complejos, se dividen sus módulos y se restan sus argumentos:

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i\,(\theta_1-\theta_2)}}$$

Para calcular potencias:

$$z^n = \left(|\mathbf{z}| e^{i\,\theta}\right)^n, \quad n \in N$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{z^n = |z|^n e^{i\,n\theta} \quad , \quad n \in N}$$

Ejemplos

Sean:

$$z_1 \; = \; 3i \; = \; 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}\right) = 3\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sen\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\,\frac{7\pi}{4}}$$

Resolver las siguientes operaciones en forma exponencial:

a) $z_1 . z_2$
b) z_1 / z_2
c) ${z_1}^{10}$

Resolución

Ítem a

$$\boldsymbol{z_1 . z_2} = 3.\sqrt{2}.\,e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7}{4}\pi\right)i} = 3\sqrt{2}\,e^{\frac{9}{4}\pi i}$$

En general suele utilizarse el argumento principal, que está comprendido en $[0\,,2\pi)$. Teniendo en cuenta que $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, resulta $Arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$.

Entonces:

$$z_1 . z_2 = 3\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Ítem b

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{4}\pi\right)i} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{5}{4}\pi i}$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{5}{4}\pi + 2\pi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

Ítem c

$$z_1{}^{10} = 3^{10} e^{i\frac{\pi}{2}.10} = 3^{10} e^{i\,5\pi}$$

Buscamos el argumento principal: $5\pi - 2(2\pi) = \pi$

Queda entonces:

$$z_1{}^{10} = 3^{10} e^{i\,\pi}$$

Identidad de Euler

Como caso particular de la fórmula de Euler, se deduce una de las fórmulas más bellas de la Matemática, conocida como Identidad de Euler:

$$\boxed{\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}}$$

Es notable por relacionar 5 de los números más importantes de la Matemática:

- El 0 y el 1, neutros respecto de la suma y de la multiplicación.
- El número π que relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro y está presente en varias de las ecuaciones fundamentales de la Física.
- El número de Euler e, que aparece en numerosos procesos naturales y en diferentes problemas físicos y matemáticos.
- La unidad imaginaria i, base para la construcción del conjunto $\mathbb{C}$.

Dejamos a cargo del lector la comprobación de esta identidad.

Operaciones en forma trigonométrica

Traduciendo a la forma trigonométrica los resultados obtenidos, resulta:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\, sen(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\, sen(n\theta)] \ \ , \ \ n \in \mathbb{N}$$

NOTA PARA EL LECTOR INTERESADO:

Las fórmulas del producto y del cociente pueden demostrarse a partir de relaciones entre las funciones trigonométricas. Por ejemplo, el producto puede deducirse a partir de las siguientes identidades:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - sen(\alpha).sen(\beta) \quad [1]$$

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).sen(\beta) \quad [2]$$

Sean $z_1 = |z_1|.\left(\cos(\alpha) + i.sen(\alpha)\right)$ y que $z_2 = |z_2|.\left(\cos(\beta) + i.sen(\beta)\right)$. Queremos calcular el producto:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|.\left(\cos(\alpha) + i.sen(\alpha)\right)\left(\cos(\beta) + i.sen(\beta)\right)$$

$$= |z_1||z_2|.\left[\cos(\alpha).\cos(\beta) - sen(\alpha).sen(\beta) + i.\left(\cos(\alpha).sen(\beta) + sen(\alpha).\cos(\beta)\right)\right]$$

Por [1] y [2]:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|.\left(\cos(\alpha+\beta) + i.sen(\alpha+\beta)\right)$$

Observamos que coincide con lo que habíamos deducido en forma exponencial.

Ejemplo

Sean:

$$z_1 = -3 + \sqrt{3}i$$
$$z_2 = -2$$
$$z_3 = -2 - 2i$$

Calcular usando la forma trigonométrica:

$$\frac{z_1.z_2^3}{z_3}$$

Resolución

Calculamos módulo y argumento de cada uno:

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} \quad ; \quad Arg(z_1) = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow z_1 = \sqrt{12}cis\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2 \quad ; \quad Arg(z_2) = \pi \Rightarrow z_2 = 2cis(\pi)$$

$$|z_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} \quad ; \quad Arg(z_3) = \frac{5}{4}\pi \Rightarrow z_2 = 2cis(\pi)$$

Entonces:

$$\frac{z_1.z_2^3}{z_3} = \frac{\sqrt{12}.2^3}{2\sqrt{2}}.cis\left(\frac{5}{6}\pi + 3(\pi) - \frac{5}{4}\pi\right) = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.cis\left(\frac{61}{12}\pi\right)$$

Si buscamos el argumento principal restando 4π de $\frac{61}{12}\pi$ obtenemos:

$$= \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} . cis\left(\frac{13}{12}\pi\right)$$

ELP 1

Completar la siguiente tabla:

Complejo	Forma binómica	Forma trigonométrica	Forma exponencial
z_1	$2 - 2i$		
z_2		$4cis\left(\frac{7}{6}\pi\right)$	
z_3			$5e^{\frac{\pi}{2}i}$
$\frac{z_3}{z_2}$			
$\frac{z_3 . {z_2}^3}{z_1}$			
$\frac{z_1}{z_2} . z_3$			
$z_2 - z_3$			
$z_1 . z_3$			

Radicación de números complejos

Criterio de igualdad de números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

¿Cuándo son iguales?

$$z_1 = z_2 \iff a = c \wedge b = d$$

Si los números complejos están dados en forma trigonométrica, ¿qué condiciones deben cumplirse para que sean iguales?

Consideremos este ejemplo:

$$z_1 = 8\,(\cos(\pi) + i\; sen(\pi)) \quad , \quad z_2 = 8\,(\cos(3\pi) + i\; sen(3\pi))$$

Observamos que tienen el mismo módulo pero diferentes argumentos. Sin embargo, silos traducimos a forma binómica resulta: $z_1 = z_2 = -8$

Teniendo en cuenta que un número complejo tiene infinitos argumentos:

$$\arg(z) = Arg(z) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

puede establecerse el siguiente criterio de igualdad de números complejos:

Sean

$$z_1 = |z_1|.(\cos\alpha + i.sen\,\alpha)$$

$$z_2 = |z_2|.(\cos\beta + i.sen\,\beta)$$

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \alpha - \beta = 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo:$3\ cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\ cis\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = 3\ cis\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

El mismo criterio se aplica para la forma exponencial.

Ejemplo introductorio

Consideremos la siguiente ecuación:

$$x^4 + 1 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Sin embargo, hay un notable teorema que nos permite asegurar que sí tiene solución en $\mathbb{C}$. Es el ***teorema fundamental del Álgebra***, que afirma:

Todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces (iguales o distintas) en el conjunto de los números complejos.

Es decir que la ecuación dada tiene exactamente 4 soluciones en $\mathbb{C}$.

Despejemos x en la ecuación $\quad x^4 + 1 = 0$

$$x^4 = -1$$

$$x = \sqrt[4]{-1}$$

Veremos a continuación cómo obtener las raíces de un número complejo.

Radicación

Dado $z = |z|e^{i\alpha}$, queremos calcular $\sqrt[n]{z}$ que llamaremos$w$.

$$\sqrt[n]{z} = w \quad \Leftrightarrow \quad w^n = z$$

Si expresamos w en forma exponencial:

$$w = |w|e^{i\beta}$$

Resulta, de acuerdo con la fórmula de potenciación:

$$w^n = |w|^n e^{in\beta}$$

$$w^n = z \Leftrightarrow |w|^n e^{in\beta} = |z| e^{i\alpha}$$

Teniendo en cuenta que:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) - \arg(z_2) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Resulta:

$$w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} |w|^n = |z| (1) \\ n\beta - \alpha = 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \qquad (2) \end{cases}$$

De (1) se deduce:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

De (2)se deduce:

$$\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto si $z = |z| e^{i\alpha}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}.e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1

Calcular$\sqrt[3]{-1-i}$.

Resolución

$$\boldsymbol{z} = -1 - i \quad , \quad |z| = \sqrt{2} \quad , \quad Arg(z) = \frac{5}{4}\pi$$

Apliquemos la fórmula que obtuvimos para las raíces de números complejos:

$$\sqrt[3]{-1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}.e^{i\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}.e^{i\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi.k\right)} \quad , \quad k \in z$$

Reemplazando k obtenemos soluciones:

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = \sqrt[6]{2}.e^{\frac{5}{12}\pi i}$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \sqrt[6]{2}.e^{\frac{13}{12}\pi i}$$

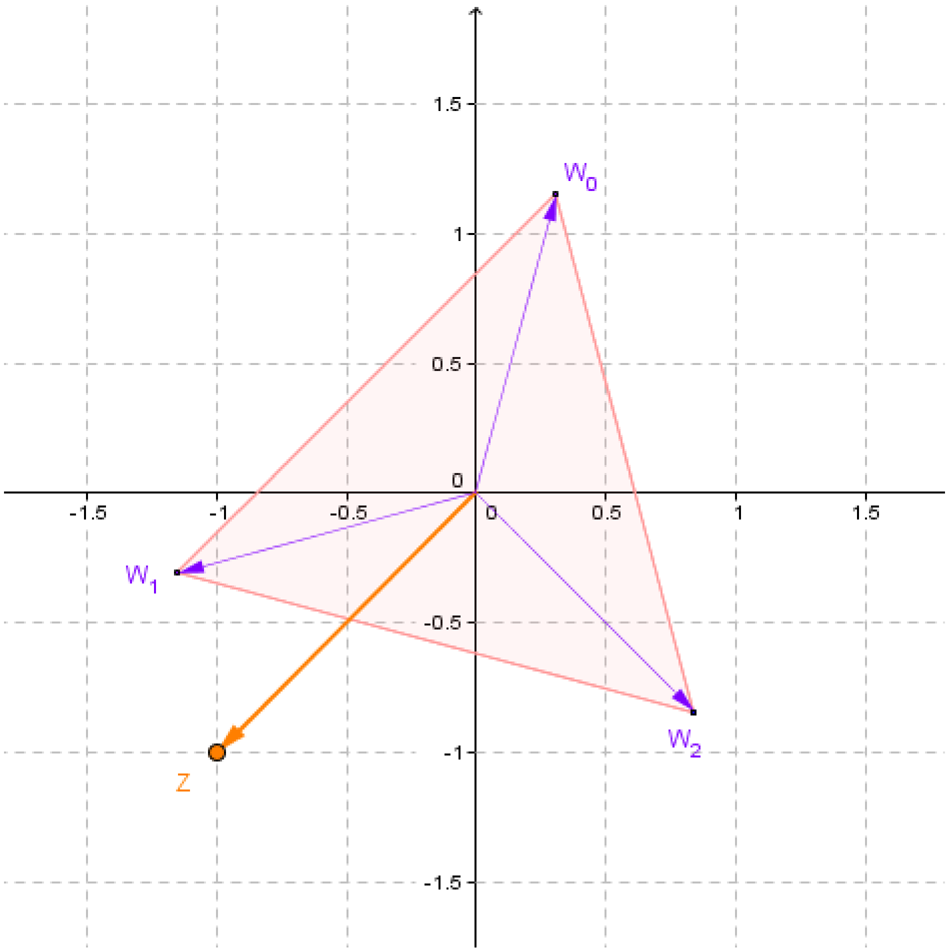
$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \sqrt[6]{2}.e^{\frac{21}{12}\pi i}$$

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad w_3 = \sqrt[6]{2}.\, e^{\frac{29}{12}\pi i}\ ,\ \frac{29}{12}\pi = 2\pi + \frac{5}{12}\pi \qquad w_3\ coincide\ con\ w_0$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad w_4 = \sqrt[6]{2}.\, e^{\frac{37}{12}\pi i}, \frac{37}{12}\pi = 2\pi + \frac{13}{12}\pi \qquad w_4\ coincide\ con\ w_1$$

$$k = 5 \quad \Rightarrow \quad w_5 = \sqrt[6]{2}.\, e^{\frac{45}{12}\pi i}\ ,\ \frac{45}{12}\pi = 2\pi + \frac{21}{12}\pi \qquad w_5\ Coincide\ con\ w_2$$

Las soluciones empiezan a repetirse. Hemos encontrado tres soluciones distintas: w_0, w_1 y w_2. Realicemos una gráfica con estas tres soluciones:



Cómo se puede ver en la gráfica, las tres raíces cúbicas de z forman un triángulo equilátero.

Retomemos la fórmula de radicación y analicemos cuántas soluciones distintas se obtienen.

Para $z = |z|e^{i\alpha}$, habíamos obtenido:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}.e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

Asignando valores a k:

$$k=0 \;\Rightarrow\; \beta_0=\frac{\alpha}{n}$$

$$k=1 \;\Rightarrow\; \beta_1=\frac{\alpha+2\pi}{n}$$

$$k=2 \;\Rightarrow\; \beta_2=\frac{\alpha+2.(2\pi)}{n}$$

$$k=3 \;\Rightarrow\; \beta_3=\frac{\alpha+3.(2\pi)}{n}$$

$$\vdots$$

$$k=n-1 \;\Rightarrow\; \beta_{n-1}=\frac{\alpha+(n-1).(2\pi)}{n}$$

$$k=n \;\Rightarrow\; \beta_n=\frac{\alpha+n.(2\pi)}{n}=\frac{\alpha}{n}+2\pi=\beta_0$$

$$k=n+1 \Rightarrow\; \beta_{n+1}=\frac{\alpha+(n+1).(2\pi)}{n}=\frac{\alpha+2\pi}{n}+2\pi=\beta_1$$

$$\vdots$$

Vemos que a partir de$k=n$, empiezan a repetirse las soluciones.

Podemos concluir que las soluciones distintas se obtienen con $k=0,1,\dots,n-1$. Por lo tanto, ***la raíz enésima de un número complejo tiene exactamente n soluciones***:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}.e^{\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)i} \qquad ,k=0\,,1\,,\dots,n-1}$$

Notemos que las n raíces tienen el mismo módulo. Tal como vimos en el ejemplo 1, podemos afirmar que las n raíces enésimas de un número complejo forman un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

EPL 2

Completar la siguiente tabla:

Complejo	Forma binómica	Forma trigonométrica	Forma exponencial
z_1		$6.\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i.sen\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$	

z_2			$2e^{\frac{1}{3}\pi}$
$\sqrt{z_1}$			
$\sqrt[3]{z_1}$			
$\sqrt[4]{z_2}$			

Ejemplo 2

Resolver en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación:

$$x^4 + 1 = 0$$

Resolución

Despejando:

$$x = \sqrt[4]{-1}$$

Luego debemos buscar la raíz cuarta de $z = -1 = e^{\pi\, i}$. Según la fórmula de radicación:

$$x = \sqrt[4]{1} e^{\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) i} \ , \ \ k = 0,1,2,3$$

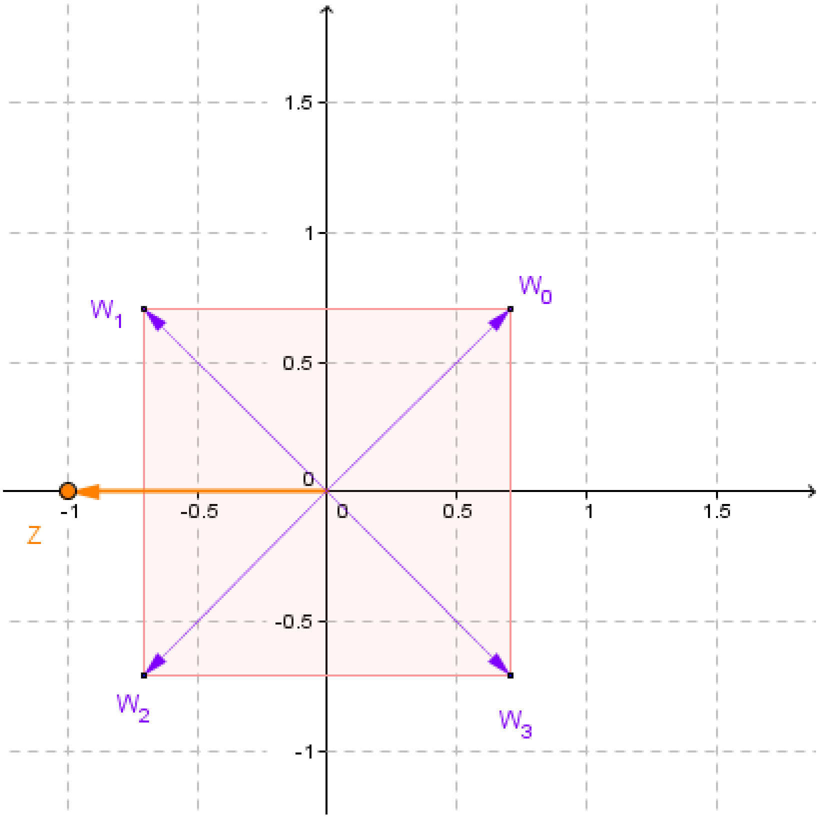
$$\Rightarrow x_0 = e^{\frac{\pi}{4} i}$$

$$\Rightarrow x_1 = e^{\frac{3\pi}{4} i}$$

$$\Rightarrow x_2 = e^{\frac{5\pi}{4} i}$$

$$\Rightarrow x_3 = e^{\frac{7\pi}{4} i}$$

Grafiquemos estas cuatro soluciones obtenidas:



También se forma un polígono regular con las raíces cuartas de z, en este caso se trata de un cuadrado.

Applet de GeoGebra para explorar la “geometría” de las raicés n-ésimas de un número complejo

En el siguiente applet es posible calcular y graficar las raíces enésimas de un número complejo dado. Está configurado para realizar raíces de índice entre 2 hasta 8.

Se puede definir un complejo z en forma binómica completando los casilleros, o bien tomar con el cursor un punto del plano.

El índice de la raíz se puede seleccionar desde $n = 2$ hasta $n = 8$ moviendo el punto sobre el segmento.

HTTP://BIT.LY/AGAGGB021

Les proponemos que elijan diferentes números complejos y calculen raíces de distintos índices.

Como habíamos visto anteriormente el gráfico de las raíces de un número complejo es un polígono regular de n lados que está inscripto en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

Este applet puede usarse para verificar los resultados obtenidos en algunos ejercicios (por ejemplo en el EPL 2).

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$:

$$x^5 + 16x = 0$$

Resolución

En $\mathbb{R}$:

Factoreando:

$$x(x^4 + 16) = 0$$

$$\Rightarrow \ x = 0 \ \vee \ \ x^4 + 16 = 0$$

La segunda ecuación no tiene solución en reales, luego:

$$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$$

En $\mathbb{C}$:

En $\mathbb{C}$hay cuatro soluciones para la ecuación $x^4 + 16 = 0$, que son las raíces cuartas de -16. Luego la solución es de la forma:

$$S_{\mathbb{C}} = \{0; w_0; w_1, w_2, w_3\}$$

Donde w_0, w_1, w_2 y w_3 son las raíces cuartas de -16. Dejamos a cargo del lector el cálculo de las mismas.

EPL 3

Hallar $z \in \mathbb{C}$ sabiendo que $w = \sqrt{3} - i$ es una de las raíces cúbicas de z. Obtener y graficar el conjunto de raíces cúbicas de z.

EPL 4

Resolver en $\mathbb{R}$y en $\mathbb{C}$la ecuación$(x^2+3)(x^3+k) = 0$sabiendo que $x = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$es una de las soluciones.

Regiones del plano complejo

A continuación veremos una serie de ejemplos que muestran cómo se puede graficar una región del plano complejo que cumple con ciertas condiciones.

Ejemplo 1

Hallar la región del plano complejo determinada por:

$$\{z \in \mathbb{C} : \quad |z + 2| \leq 1\}$$

Resolución

Si $z = x + yi$, resulta:

$$|x + yi + 2| \leq 1$$

$$|(x + 2) + yi\,| \leq 1$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \leq 1$$

Observación importante: La unidad imaginaria no interviene en el cálculo del módulo: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

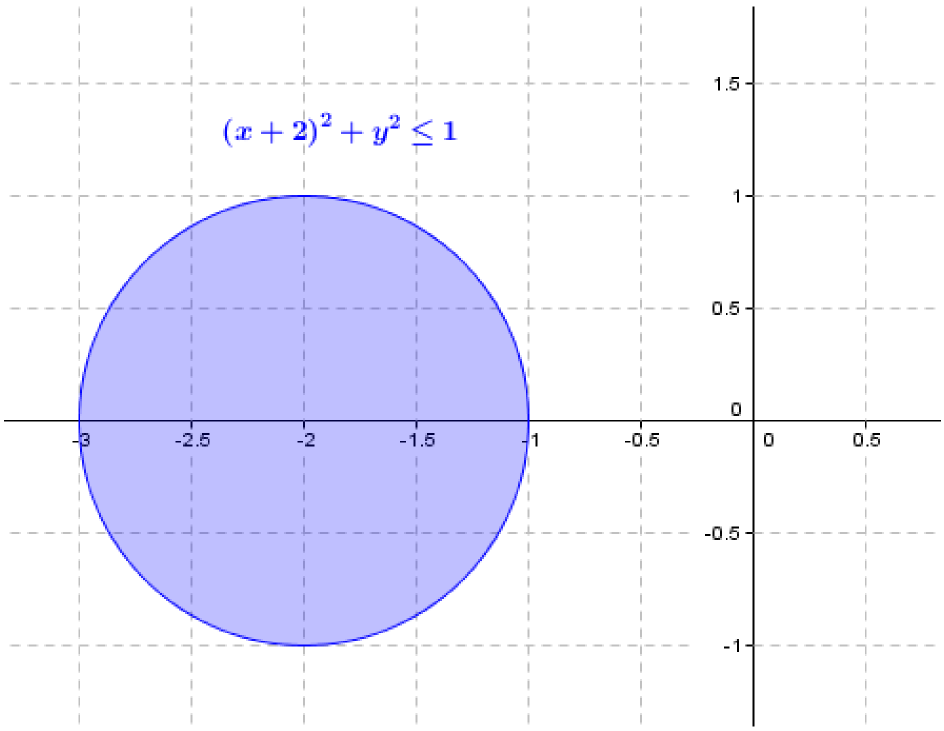
$$(x + 2)^2 + y^2 \leq 1$$

Podemos sustituir el símbolo de ≤ por el de = para obtener la frontera o borde de la región:

$$(x + 2)^2 + y^2 = 1$$

Ésta es la ecuación de una circunferencia con centro en $(-2{,}0)$ y radio 1.

Veamos una gráfica de la región:



Son todos los puntos que están a distancia menor o igual que 1 del punto (-2,0)

Ejemplo 2

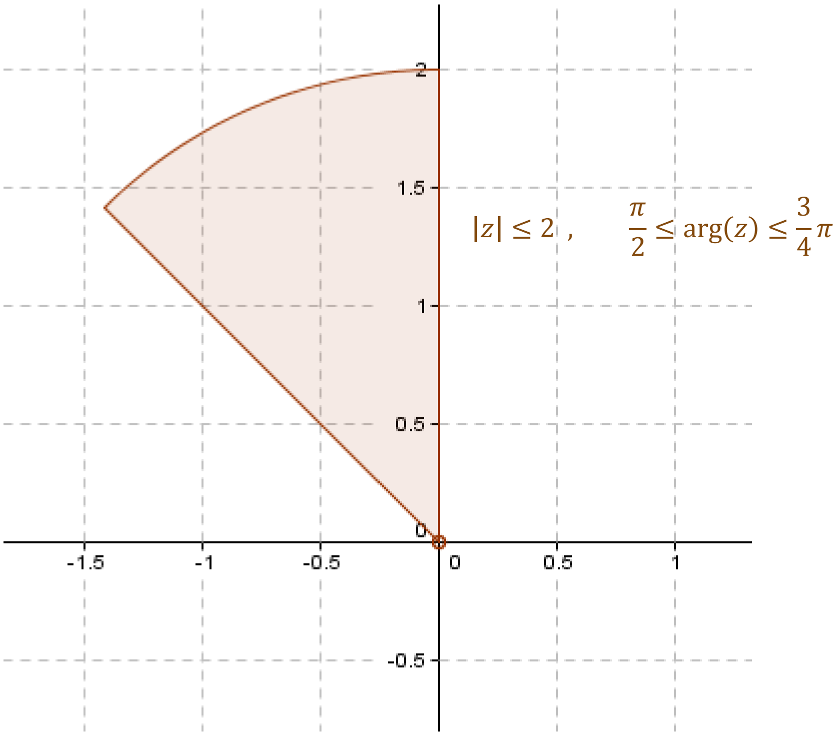
Hallar la región del plano complejo determinada por:

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq 2 \;, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi\right\}$$

Resolución

Esta región está definida utilizando la expresión trigonométrica de un número complejo. $|z| \leq 2$ quiere decir que el módulo debe ser menor o igual a 2, y la otra condición establece que el argumento está entre $\pi/2$ y $3/4\pi$.

Luego:



Observación: $z = (0,0)$ no está incluido, porque no tiene argumento.

Ejemplo 3

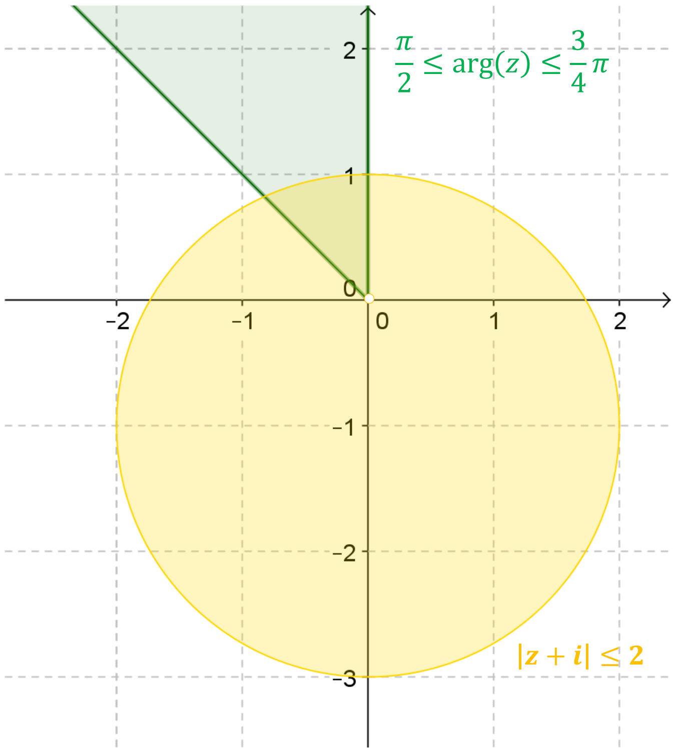
Hallar la región del plano complejo determinada por:

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z+i| \leq 2 \;, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi\right\}$$

Resolución

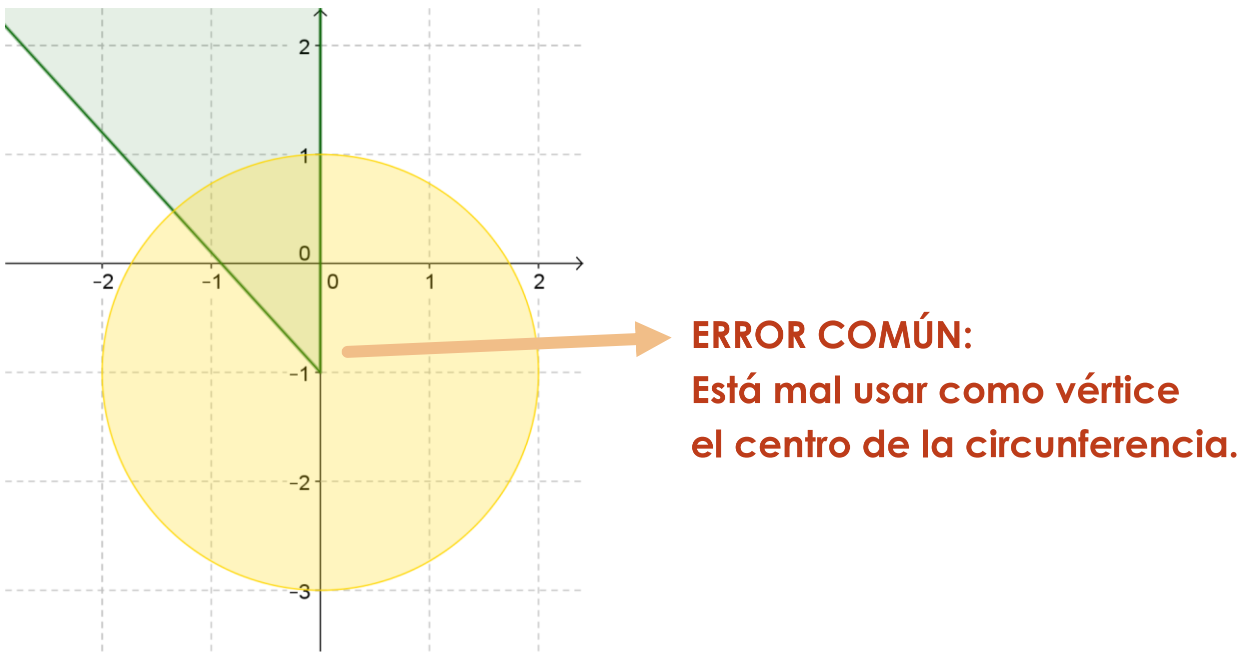
Esta región está definida utilizando la expresión trigonométrica de un número complejo. $|z+i| \leq 2$representa al círculo con centro en $-i$ de radio 2. La otra condición establece que el argumento está comprendido entre $\pi/2$ y $3/4\pi$.

Luego la intersección entre ambas regiones es:



Noten que $z = 0$ no está incluido porque no tiene argumento.

Observación: un error muy común es indicar el ángulo dado por $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{4}\pi$ con vértice en el centro de la circunferencia:



Ejemplo 4

$$\{z \in \mathbb{C} : \quad |z+i| = |z-1| \ , \qquad Re(z) > 1\}$$

Resolución

Razonamiento analítico

$$|x + iy + i| = |x + iy - 1|$$

$$|\, x + i(y + 1)| = |\,(x - 1) + iy\,|$$

Calculamos el módulo de cada complejo:

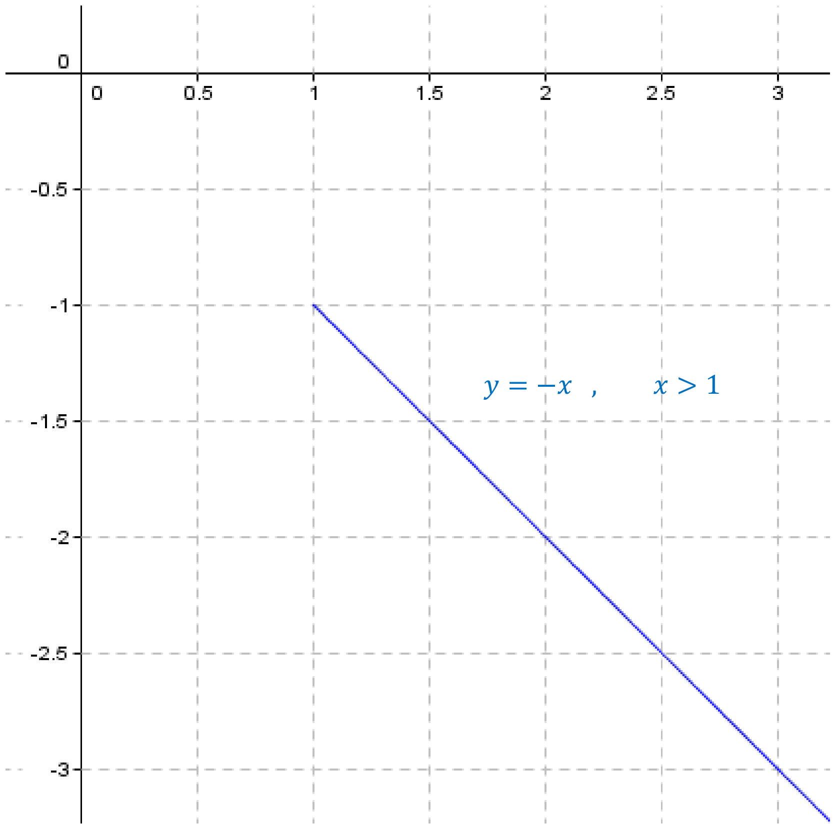
$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \quad , \quad x > 1$$

$$x^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \quad , \quad x > 1$$

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \quad , \quad x > 1$$

$$2y + 1 = -2x + 1 \quad , \quad x > 1$$

$$y = -x \quad , \qquad x > 1$$



Interpretación geométrica

Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $|a - b|$ representa la distancia entre a y b.

Análogamente se puede definir la distancia en $\mathbb{C}$. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre z_1 y z_2.

Luego $|z + i| = |z - (-i)|$representa la distancia entre z y $-i$.

Y $|z-1|$ representa la distancia entre z y 1.

La ecuación$|z+i| = |z-1|$caracteriza al conjunto de números complejos que están a igual distancia de$(-i)$ que de 1.

Traducido a $\mathbb{R}^2$, se trata del conjunto de puntos del plano que equidistan de $A(0,-1)$ y $B(1,0)$, o sea, es la mediatriz del segmento AB. Considerando la restricción $Re(z) > 1$, se obtiene la gráfica anterior.

Ejemplo 5

Hallar la región del plano complejo determinada por:

$$Im(z-i) = Re(z+1)$$

Resolución

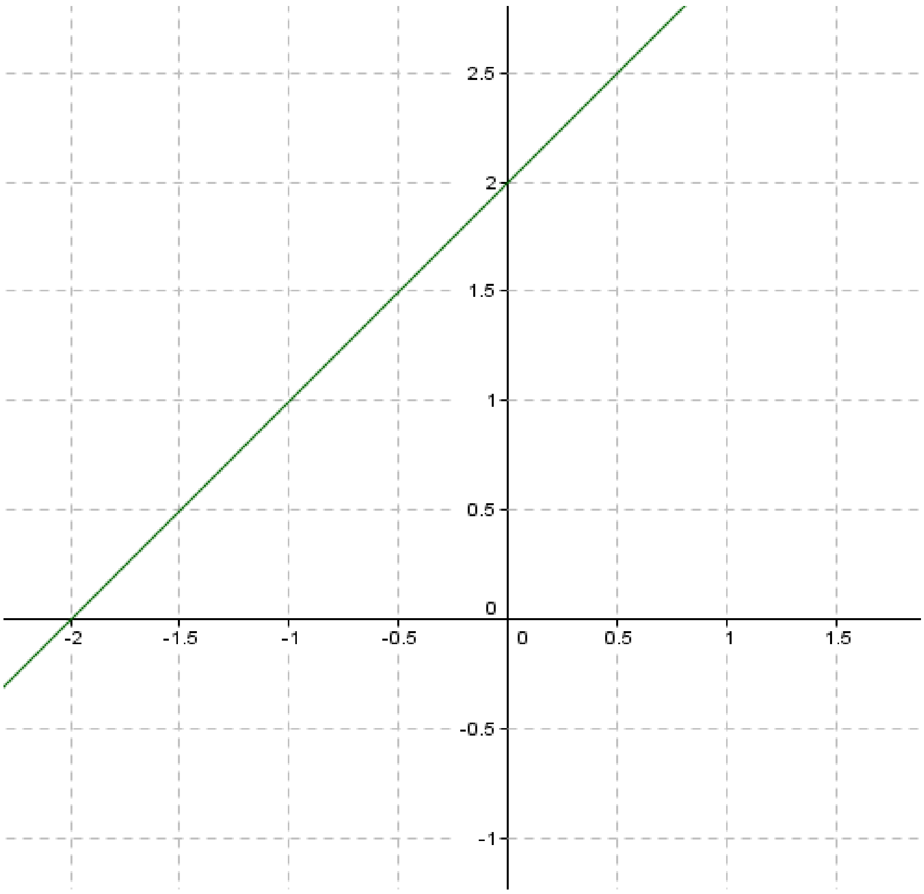
Escribiremos al número complejo z como $x+yi$:

$$Im(x+iy-i) = Re(x+iy+1)$$

$$y-1 = x+1$$

$$y = x+2$$

Veamos una gráfica de la región (que es sencillamente la recta $y = x+2$):



Ejemplo 6

Hallar la región del plano complejo determinada por:

$$\begin{cases} |z-i|+|z+i|=4 \\ 0 \leq Arg(z) \leq \pi \end{cases}$$

Resolución

$$|x+yi-i|+|x+yi+i|=4$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

Elevamos al cuadrado a ambos miembros:

$$x^2+(y-1)^2=4^2+x^2+(y+1)^2-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$y^2-2y+1=4^2+y^2+2y+1-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$-4y-16=-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\frac{y+4}{2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

Volvemos a elevar al cuadrado a ambos miembros:

$$\frac{(y+4)^2}{4}=x^2+(y+1)^2$$

$$(y+4)^2=4x^2+4(y+1)^2$$

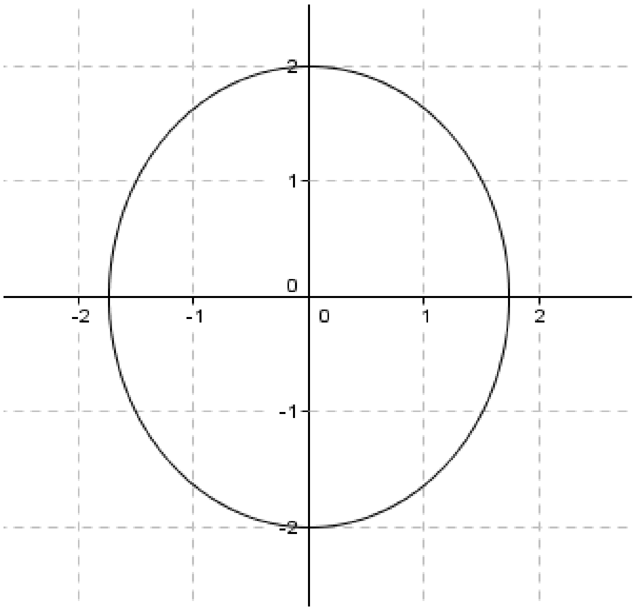
$$y^2+8y+16=4x^2+4y^2+8y+4$$

$$0=4x^2+3y^2-12$$

$$12=4x^2+3y^2$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$$

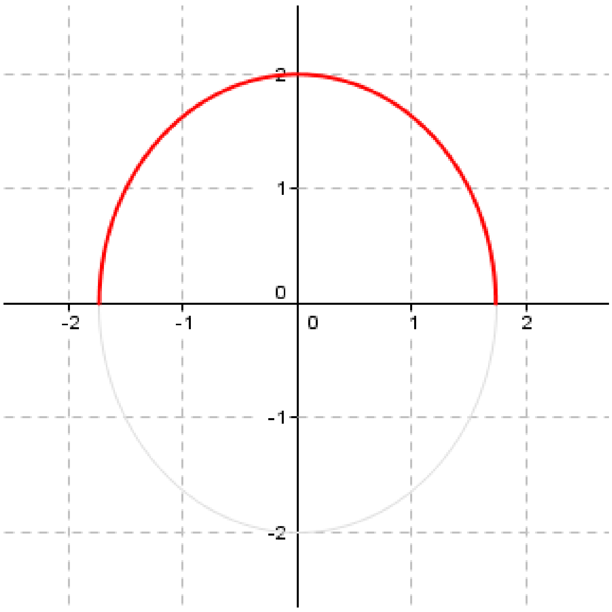
Se trata de la ecuación de una elipse con eje focal vertical y centrada en $(0,0)$:



Pero también debe ser:

$$0 \leq Arg(z) \leq \pi$$

Luego no es toda la elipse sino aquel arco que cumple con que el argumento está comprendido entre 0 y π:



Interpretación geométrica

$$\begin{cases} |z-i|+|z+i|=4 \\ 0 \leq Arg(z) \leq \pi \end{cases}$$

$|z-i|$: representa la distancia de z a i.

$|z+i|$: representa la distancia de z a $-i$.

Es decir que la suma de esas distancias debe ser constante, e igual a 4.

Traducido a $\mathbb{R}^2$, es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos: $(0,1)$ y $(0,-1)$ es igual a 4. De acuerdo con lo que hemos visto en la unidad de cónicas, se trata de la elipse de focos $(0,1)$ y $(0,-1)$ y semieje mayor $a = 2$.

Para hallar el semieje menor aplicamos la relación: $a^2 = b^2 + c^2$, a partir de la cual se obtiene $b = \sqrt{3}$.

EPL 5

Hallar analíticamente y graficar la región del plano complejo definida por:

$$\{z \in C:\ |z - 2i| < 2\ , \qquad Im(z^2) \leq 0\ ,\ \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}\ \}$$